X1-159 (2021/10/22)

قانونِ سومِ نیوتُن، در فضاها یِ نَ-لزومَن-خطی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تعمیم ی برا یِ قانونِ سومِ نیوتُن [1]، شکلها یِ ضعیف و قوی، در فضاها یِ نَ-لزومَن-خطی پیشنهاد میشود. این پیشنهاد بر اساسِ ژئُدزیکِ ست که دُ ذره یِ برهمکنش-دار را به هم وصل میکند. نتیجه این است که نیروها یی که این دُ-ذره به هم وارد میکنند اندازه یِ یکسان دارند؛ موازی-منتقل-شده یِ یک ی از این نیروها (در راستا یِ ژئُدزیکِ واصل) از یک ذره به دیگری، قرینه یِ نیرو یِ دیگر است؛ و در شکلِ قوی هر یک از نیروها مماس بر ژئُدزیکِ واصل است. برا یِ نیروها یِ مشتق از یک انرژی-یِ-پتانسیل هم، شکل ی برا یِ انرژی-یِ-پتانسیل پیشنهاد میشود که نیروها یِ متناظر با آن مانسته یِ شکلِ قوی یِ قانونِ سومِ نیوتُن [1] را برمیئاورند.

0 درامد

نیرو یی که ذره یِ 1 به ذره یِ 2 وارد میکند را با $F_{1\to 2}$، و نیرو یی که ذره یِ 2 به ذره یِ 1 وارد میکند را با $F_{2\to 1}$ نشان میدهم. جا یِ دُ ذره یِ 1 و 2 را هم با، به ترتیب، r_1 و r_2 نشان میدهم. شکلِ ضعیفِ قانونِ سومِ نیوتُن [1] میگوید نیروها یی که دُ ذره به هم وارد میکنند قرینه یِ یکدیگر َند، یعنی $F_{2\to 1}$ قرینه یِ $F_{1\to 2}$ است. از جمله اندازه یِ این نیروها یکسان است. شکلِ قوی یِ قانونِ سومِ نیوتُن [1]

میگوید علاوه بر این، هر یک از این نیروها در راستا یِ خطِ واصلِ دُ-ذره است.

اینها فقط در فضاها یِ خطی کار میکنند، جا یی که موازی-بودنِ دُ بردار در نقطه یِ مختلف معنی دارد. فقط برابری یِ اندازه یِ نیروها ست که در فضاها یِ نَ-لزومَن-خطی هم معنی دارد. $F_{1\to 2}$ بردار ی در r_2 است، و $F_{2\to 1}$ بردار ی در r_1 است. پس در حالتِ کلی، بدونِ یک ساختارِ اضافی، مقایسه یِ این نیروها بی-معنی ست. در یک فضا یِ نَ-لزومَن-خطی، موازی-بودنِ دُ بردار در دُ نقطه یِ مختلف را میشود تعریف کرد، اما بر اساسِ خم ی که آن دُ نقطه را به هم وصل کند. و نتیجه، در حالتِ کلی، به خم وابسته است. خم ی که دُ نقطه را به هم وصل میکند یکتا نیست. پس موازی-بودن (یا نبودن)ِ دُ بردار در دُ نقطه یِ مختلف هم، در حالتِ کلی خُش-تعریف نیست. اما ممکن است بشود از بینِ خمها یی که دُ نقطه را به هم وصل میکنند یک ی را خاص کرد. به این شکل، یک توازی یِ خاص بینِ دُ بردار در دُ نقطه یِ مختلف تعریف میشود. و این یک راه میدهد برا یِ تعمیمِ قانونِ سومِ نیوتُن [1] به فضاها یِ کلی. اینجا این راه را به کار میبَرَم، و آن خمِ خاص را ژئُدزیک میگیرم. این کار مفصل-شده یِ بخشِ 4 از [2] است.

1 انتقالِ موازی

متناظر با خمِ γ، تابعِ برداری یِ P_γ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_0,\sigma_0)]\,u = u. \tag{1}$$

$$\mathrm{D}\,\{[\mathsf{P}_\gamma(\centerdot,\sigma_0)]\,u\}^i = -[\Gamma^i{}_{j\,k}(\gamma)]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,\{[\mathsf{P}_\gamma(\centerdot,\sigma_0)]\,u\}^k. \tag{2}$$

σ_0 و σ عدد (مقدارِ پارامترِ خم) َند، $(\mathrm{D}\,\mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است، u بردار ی در $[\gamma(\sigma_0)]$ است، و $\{[\mathsf{P}_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\,u\}$ بردار ی در $[\gamma(\sigma)]$ است. Γ هم هموستار است. رُشن است که $[\mathsf{P}_\gamma(\sigma,\sigma_0)]$ خطی ست. به $\{[\mathsf{P}_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\,u\}$ انتقال-ِ-موازی-یافته یِ u بر خمِ γ از σ_0 تا σ میگویم. دیده میشود

$$[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_2,\sigma_1)]\,[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_1,\sigma_0)] = \mathsf{P}_\gamma(\sigma_2,\sigma_0). \tag{3}$$

از جمله،

$$[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_0,\sigma_1)]\,[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_1,\sigma_0)]=\mathbf{1}. \tag{4}$$

بازپارامتریده یِ خمِ γ با بازپارامترشِ $\mathfrak{r}$ خمِ $(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})$ است. رُشن است که

$$(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})[\mathfrak{r}(\sigma)]=\gamma(\sigma). \tag{5}$$

پس،

$$\{[\mathrm{D}\,(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})][\mathfrak{r}(\sigma)]\}\,[(\mathrm{D}\,\mathfrak{r})(\sigma)]=(\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma). \tag{6}$$

با استفاده از این، از تعریفِ انتقال- ِموازی دیده میشود

$$\mathsf{P}_{\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}}[\mathfrak{r}(\sigma),\mathfrak{r}(\sigma_0)]=\mathsf{P}_\gamma(\sigma,\sigma_0). \tag{7}$$

یا،

$$\mathsf{P}_{\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}}[(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})^{-1}(r),(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})^{-1}(r_0)]=\mathsf{P}_\gamma[\gamma^{-1}(r),\gamma^{-1}(r_0)]. \tag{8}$$

که،

$$r_0=\gamma(\sigma_0). \tag{9}$$

$$r=\gamma(\sigma). \tag{10}$$

این یعنی انتقال- ِموازی با بازپارامترش تغییر نمیکند. پس میشود انتقال- ِموازی را برا یِ رده یِ خمها یی که بازپارامتریده یِ یکدیگر َند تعریف کرد. رده یِ خمها یِ بازپارامترش-همئرز با γ را با $[\gamma]$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\gamma]=\{\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}\mid\mathfrak{r}\}. \tag{11}$$

تابعِ برداری یِ $\mathbf{P}_{[\gamma]}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{P}_{[\gamma]}[\gamma(\sigma),\gamma(\sigma_0)]=\mathsf{P}_\gamma(\sigma,\sigma_0). \tag{12}$$

یا،

$$\mathbf{P}_{[\gamma]}(r, r_0) = \mathsf{P}_\gamma[\gamma^{-1}(r), \gamma^{-1}(r_0)]. \tag{13}$$

رُشن است که $[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r, r_0)]$ خطی ست، بر یک بردار در r_0 اثر میکند، و مقدارَ ش در r است. و البته r_0 و r نقاط ی بر خمِ γ یند. همچنین، از (3) دیده میشود

$$[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_2, r_1)]\,[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_1, r_0)] = \mathbf{P}_{[\gamma]}(r_2, r_0). \tag{14}$$

از جمله،

$$[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_0, r_1)]\,[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_1, r_0)] = \mathbf{1}. \tag{15}$$

2 ژئُدزیک

خمِ γ ژئُدزیک است، اگر انتقال-ِ-موازی-یافته یِ مماسِ γ بر γ، با مماسِ γ موازی باشد.

$$[\mathsf{P}_\gamma(\sigma, \sigma_0)]\,[(\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma_0)] = [b(\sigma, \sigma_0)]\,[(\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma)]. \tag{16}$$

که b یک تابعِ اسکالر است. رُشن است که،

$$b(\sigma_0, \sigma_0) = 1. \tag{17}$$

رابطه یِ (16) را در (2) میگذارم:

$$\mathrm{D}\,\{[b(\bullet, \sigma_0)]\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)\} = -[\Gamma^i{}_{j\,k}(\gamma)]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,\{[b(\bullet, \sigma_0)]\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)\}. \tag{18}$$

یا،

$$\mathrm{D}^2\,\gamma^i = -[\Gamma^i{}_{j\,k}(\gamma)]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k) - \frac{\mathrm{D}\,[b(\bullet, \sigma_0)]}{b(\bullet, \sigma_0)}\,\mathrm{D}\,\gamma^i. \tag{19}$$

با تغییر-دادنِ پارامتر، مشتق-گیری در یک تابعِ اسکالر ضرب میشود:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\sigma'} = \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\sigma'}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\sigma}. \tag{20}$$

یا،

$$\mathrm{D}' = \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\sigma'}\,\mathrm{D}. \tag{21}$$

که D و D' مشتقگیری نسبت به، به ترتیب، σ و σ' اند. از جمله میشود پارامترِ τ را با این شرط انتخاب کرد:

$$\mathrm{D}\,\{[b\,(\centerdot, \sigma_0)]\,\mathrm{D}\,\tau\} = 0. \tag{22}$$

البته همراه با این که مشتقِ τ نسبت به σ صفر نیست. در این صورت (18) چنین میشود.

$$\mathsf{D}^2\,\gamma^i = -[\Gamma^i{}_{j\,k}(\gamma)]\,(\mathsf{D}\,\gamma^j)\,(\mathsf{D}\,\gamma^k) \tag{23}$$

که D مشتق-گیری نسبت به τ است. به یک پارامتر که معادله یِ ژئُدزیک بر حسبِ آن به شکلِ (23) است، پارامترِ آفین میگویند. به سادگی دیده میشود متناظر با هر ژئُدزیک، همیشه یک پارامتر- ِ-آفین هست؛ و اگر τ یک پارامترِ آفین باشد، هر پارامتر آفین است اگر و تنها اگر یک تابعِ دست- ِ-بالا-خطی از τ باشد.

3 ضرب- ِ-درونی و طول

طول- ِ-جبری یِ خمِ γ از σ_0 تا σ را با $\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathrm{d}\,\varsigma\,|(\mathrm{D}\,\gamma)(\varsigma)|. \tag{24}$$

که $|u|$ طولِ بردارِ u است:

$$|u| = \sqrt{u\cdot u}. \tag{25}$$

$(u\cdot v)$ هم حاصل- ِ-ضربِ درونی یِ بردارها یِ u و v است. حاصل- ِ-ضربِ درونی برا یِ بردارها یی با جا یِ یکسان تعریف میشود. برا یِ u و v، که هر-دُ در r اند،

$$u\cdot v = [g_{i\,j}(r)]\,u^i\,v^j. \tag{26}$$

که g متریک است (که ضرب- ِ-درونی با آن تعریف میشود). به این ترتیب،

$$\ell_\gamma(\sigma, \sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathrm{d}\,\varsigma\ \left[\sqrt{(g_{i\,j} \circ \gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}\right](\varsigma). \tag{27}$$

دیده میشود

$$\ell_\gamma(\sigma_0, \sigma_0) = 0. \tag{28}$$

$$\ell_\gamma(\sigma_2, \sigma_0) = \ell_\gamma(\sigma_2, \sigma_1) + \ell_\gamma(\sigma_1, \sigma_0). \tag{29}$$

از تعریفِ طول- ِ-جبری-یِ-خم، رابطه یِ (24)، دیده میشود

$$\ell_{\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}}[\mathfrak{r}(\sigma), \mathfrak{r}(\sigma_0)] = [\mathrm{sgn}(\mathrm{D}\,\mathfrak{r})]\,\ell_\gamma(\sigma, \sigma_0). \tag{30}$$

که $\mathrm{sgn}(\mathfrak{X})$ علامتِ $\mathfrak{X}$ است. فرض این است که $(\mathrm{D}\,\mathfrak{r})$ صفر نمیشود. پس علامتِ $(\mathrm{D}\,\mathfrak{r})$ تغییر نمیکند و میشود آن را از انتگرال بیرون آورد. طولِ خم را قدر- ِ-مطلقِ طول- ِ-جبری یِ خم تعریف میکنم. از (30) دیده میشود طول- ِ-خم با بازپارامترش تغییر نمیکند:

$$|\ell_{\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}}|[\mathfrak{r}(\sigma), \mathfrak{r}(\sigma_0)] = |\ell_\gamma|(\sigma, \sigma_0). \tag{31}$$

از اینجا یک طول برا یِ رده یِ همئرزی یِ خمها یی که بازپارامتریده یِ یکدیگر َند تعریف میکنم. این طول را با $\boldsymbol{\ell}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\ell}_{[\gamma]}[\gamma(\sigma), \gamma(\sigma_0)] = |\ell_\gamma|(\sigma, \sigma_0). \tag{32}$$

یا،

$$\boldsymbol{\ell}_{[\gamma]}(r, r_0) = |\ell_\gamma|[\gamma^{-1}(r), \gamma^{-1}(r_0)]. \tag{33}$$

ضمنَن دیده میشود طول- ِ-خم نسبت به ابتدا و انتها یِ خم متقارن است:

$$|\ell_\gamma|(\sigma_0, \sigma) = |\ell_\gamma|(\sigma, \sigma_0). \tag{34}$$

و البته،

$$\boldsymbol{\ell}_{[\gamma]}(r_0, r) = \boldsymbol{\ell}_{[\gamma]}(r, r_0). \tag{35}$$

4 ژئُدزیک و ضرب-ِ-درونی

برا یِ تعریف ِ ژئُدزیک، تعریف ِ انتقال-ِ-موازی لازم است. برا یِ این هم هموستار لازم است. هموستار اصولَن دلبخاه است. اما بر اساس ِ یک ضرب-ِ-درونی هم میشود یک هموستار، و متناظر با آن ژئُدزیک تعریف کرد.

میگویم γ یک ژئُدزیک با ابتدا یِ r_1 و انتها یِ r_2 است، اگر وردش ِ طول-ِ-جبری یِ خم از σ_1 تا σ_2، بر خمها یی که در σ_1 برابر با r_1 و در σ_2 برابر با r_2 اند صفر باشد. این شرطها یعنی

$$\gamma(\sigma_a) = r_a, \quad a \in \{1, 2\}. \tag{36}$$

و،

$$\ell_{\gamma+\delta\,\gamma}(\sigma_2, \sigma_1) = \ell_\gamma(\sigma_2, \sigma_1) + o(\delta\,\gamma). \tag{37}$$

که،

$$(\delta\,\gamma)(\sigma_a) = 0, \quad a \in \{1, 2\}. \tag{38}$$

تعریف ِ طول-ِ-جبری یِ-خم را میشود چنین نوشت.

$$\ell_\gamma(\sigma_2, \sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathrm{d}\,\varsigma\, L[\gamma(\varsigma), (\mathrm{D}\,\gamma)(\varsigma)]. \tag{39}$$

که،

$$L[\gamma(\varsigma), (\mathrm{D}\,\gamma)(\varsigma)] = |(\mathrm{D}\,\gamma)(\varsigma)|. \tag{40}$$

از (39) نتیجه میشود

$$\ell_{\gamma+\delta\,\gamma}(\sigma_2, \sigma_1) = \ell_\gamma(\sigma_2, \sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathrm{d}\,\varsigma\, \left[\frac{\partial\,L}{\partial\,\gamma^i}\,\delta\,\gamma^i + \frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\,\delta\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)\right](\varsigma) + o(\delta\,\gamma). \tag{41}$$

و با یک انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ،

$$\ell_{\gamma+\delta\,\gamma}(\sigma_2,\sigma_1)=\ell_\gamma(\sigma_2,\sigma_1)+\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\mathrm{d}\,\varsigma\,(\mathcal{E}_{\gamma\,i}\,\delta\,\gamma^i)(\varsigma)$$
$$-\left[\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\,\delta\,\gamma^i\right](\sigma_1)+\left[\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\,\delta\,\gamma^i\right](\sigma_2)+o(\delta\,\gamma). \quad (42)$$

که،

$$\mathcal{E}_{\gamma\,i}=\frac{\partial\,L}{\partial\,\gamma^i}-\mathrm{D}\,\left[\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\right]. \quad (43)$$

جملاتِ سوم و چهارمِ طرفِ راستِ (42)، به خاطرِ (38) صفر َند. پس (37) یعنی

$$\mathcal{E}_{\gamma\,i}=0. \quad (44)$$

از تعریفِ L دیده میشود

$$\frac{\partial\,L}{\partial\,\gamma^i}=\frac{[(\partial_i\,g_{j\,k})\circ\gamma]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)}{2\,|\mathrm{D}\,\gamma|}. \quad (45)$$

که ∂_i مشتقِ پارِئی نسبت به مختصه یِ i ُم (ِ متغیر) است. از تعریفِ L، همچنین، دیده میشود

$$\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}=\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}. \quad (46)$$

پس،

$$\mathrm{D}\,\left[\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\right]=\frac{[(\partial_k\,g_{i\,j})\circ\gamma]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}$$
$$+\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}^2\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}-\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\frac{\mathrm{D}\,|\mathrm{D}\,\gamma|}{|\mathrm{D}\,\gamma|}. \quad (47)$$

$[(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)]$ نسبت به j و k متقارن است. پس در طرفِ راست، به جا یِ ضریبِ آن میشود بخشِ متقارنِ ضریب (نسبت به j و k) را گذاشت:

$$\mathrm{D}\,\left[\frac{\partial\,L}{\partial\,(\mathrm{D}\,\gamma^i)}\right]=\frac{[(\partial_k\,g_{i\,j}+\partial_j\,g_{i\,k})\circ\gamma]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)}{2\,|\mathrm{D}\,\gamma|}$$
$$+\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}^2\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}-\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\frac{\mathrm{D}\,|\mathrm{D}\,\gamma|}{|\mathrm{D}\,\gamma|}. \quad (48)$$

از (45) و (48) نتیجه میشود

$$\mathcal{E}_{\gamma\, i} = -\frac{[(\partial_k\, g_{i\,j} + \partial_j\, g_{i\,k} - \partial_i\, g_{j\,k}) \circ \gamma]\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k)}{2\,|\mathrm{D}\,\gamma|} - \frac{(g_{i\,j} \circ \gamma)\,(\mathrm{D}^2\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|} + \frac{(g_{i\,j} \circ \gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\frac{\mathrm{D}\,|\mathrm{D}\,\gamma|}{|\mathrm{D}\,\gamma|}. \tag{49}$$

یا،

$$\mathcal{E}_{\gamma\, i} = (g_{i\,m} \circ \gamma)\,\mathcal{E}_\gamma^m. \tag{50}$$

که،

$$\mathcal{E}_\gamma^i = \frac{1}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\left[-(\underset{\circ}{\Gamma}{}^i{}_{j\,k} \circ \gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)\,(\mathrm{D}\,\gamma^k) - \mathrm{D}^2\,\gamma^i + \frac{\mathrm{D}\,|\mathrm{D}\,\gamma|}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\mathrm{D}\,\gamma^i\right]. \tag{51}$$

و $\underset{\circ}{\Gamma}$ هموستار ِ لِوی-چیویتا [3] است:

$$g_{i\,m}\,\underset{\circ}{\Gamma}{}^m j\,k = \frac{\partial_k\, g_{i\,j} + \partial_j\, g_{i\,k} - \partial_i\, g_{j\,k}}{2}. \tag{52}$$

دیده میشود معادلات ِ (44) همئرز َند با معادلات ِ (19)، با

$$\frac{\mathrm{D}\,[b(\centerdot, \sigma_0)]}{b(\centerdot, \sigma_0)} = -\frac{\mathrm{D}\,|\mathrm{D}\,\gamma|}{|\mathrm{D}\,\gamma|}. \tag{53}$$

که یعنی،

$$\mathrm{D}\,\{[b(\centerdot, \sigma_0)]\,|\mathrm{D}\,\gamma|\} = 0. \tag{54}$$

پارامتر ِ τ را (صرف- ِ-نظر از یک ثابت ِ جمعی) با این رابطه تعریف میکنم.

$$\mathrm{D}\,\tau = |\mathrm{D}\,\gamma|. \tag{55}$$

این یعنی τ پارامتر ِ طول- ِ-خم است. دیده میشود τ رابطه یِ (22) را برمیئاورَد. پس τ یک پارامتر ِ آفین است. در واقع،

$$\mathcal{E}_\gamma^i = |\mathrm{D}\,\gamma|\,\left[-(\underset{\circ}{\Gamma}{}^i{}_{j\,k} \circ \gamma)\,\frac{\mathrm{D}\,\gamma^j}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\frac{\mathrm{D}\,\gamma^k}{|\mathrm{D}\,\gamma|} - \frac{1}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{D}\,\gamma^i}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\right]. \tag{56}$$

یعنی،

$$\mathcal{E}_\gamma^i = |\mathrm{D}\,\gamma|\,[-(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i{}_{j\,k}\circ\gamma)\,(\mathsf{D}\,\gamma^j)\,(\mathsf{D}\,\gamma^k) - \mathsf{D}^2\,\gamma^i]. \tag{57}$$

که،

$$\mathsf{D} = \frac{1}{|\mathrm{D}\,\gamma|}\,\mathrm{D}. \tag{58}$$

پس D مشتق-گیری نسبت به τ است. از (57) دیده میشود معادلاتِ (44) با معادلاتِ (23) همئرزَند. این هم یک راهِ دیگر برا یِ نشان-دادنِ این است که τ (پارامترِ طول-ِ-خم) یک پارامترِ آفین است.

در یک فضا یِ خطی یِ اقلیدسی ژئُدزیک ی که دُ نقطه را به هم وصل میکند یک پاره-خط است، و فاصله یِ دُ نقطه طولِ این پاره-خط است. یک تعمیمِ این، تعریفِ فاصله بر اساسِ ژئُدزیک است: فاصله یِ r_1 و r_2 را با $[\Lambda(r_2, r_1)]$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم

$$\Lambda(r_2, r_1) = \boldsymbol{\ell}_{[\gamma]}(r_2, r_1). \tag{59}$$

که γ ژئُدزیک ی ست که r_1 را به r_2 وصل میکند. رُشن است که این تعریف فقط وقت ی سازگار است که ژئُدزیک ی که r_1 را به r_2 وصل میکند، تا حدِ بازپارامترش یکتا باشد، دست-ِ-کم طولِ ژئُدزیک ی که r_1 را به r_2 وصل میکند یکتا باشد. دیده میشود فاصله یِ دُ نقطه نسبت به دُ-نقطه متقارن است:

$$\Lambda(r_1, r_2) = \Lambda(r_2, r_1). \tag{60}$$

مشتقِ $[\Lambda(r, r_0)]$ نسبت به r را با $[(\nabla\,\Lambda)(\centerdot, r_0)]$ نشان میدهم:

$$\Lambda(r + \delta\,r, r_0) = \Lambda(r, r_0) + \{[(\nabla\,\Lambda)(\centerdot, r_0)](r)\}\,(\delta\,r) + o(\delta\,r). \tag{61}$$

از تعریفِ Λ دیده میشود

$$\Lambda(r + \delta\,r, r_0) = \boldsymbol{\ell}_{[\gamma + \delta\,\gamma]}(r + \delta\,r, r_0). \tag{62}$$

یا،

$$\Lambda(r+\delta\, r, r_0) = |\ell_{\gamma+\delta\,\gamma}|(\sigma,\sigma_0). \tag{63}$$

که $(\gamma+\delta\,\gamma)$ ژئُدزیک ی ست که r_0 را به $(r+\delta\, r)$ وصل میکند، و پارامتر چنان گرفته شده که مقدارِ آن برا یِ ابتدا و انتها یِ خم ثابت است (با تغییرِ r عوض نمیشود). پس علاوه بر (10)،

$$(\delta\,\gamma)(\sigma) = \delta\, r. \tag{64}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\Lambda(r+\delta\, r, r_0) = \Lambda(r, r_0) &+ \{\mathrm{sgn}[\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathrm{d}\,\varsigma\; (\mathcal{E}_{\gamma\, i}\,\delta\,\gamma^i)(\varsigma) \\ &+ \{\mathrm{sgn}[\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\} \left[\frac{(g_{i\,j}\circ\gamma)\,(\mathrm{D}\,\gamma^j)}{|\mathrm{D}\,\gamma|}(\sigma)\right] (\delta\, r^i) + o(\delta\,\gamma). \end{aligned} \tag{65}$$

معادله یِ ژئُدزیک، رابطه یِ (44)، نتیجه میدهد جمله یِ دومِ طرفِ راست صفر است. پس (61) و (65) نتیجه میدهند

$$(\nabla\,\Lambda)(\centerdot, r_0) = \tau. \tag{66}$$

که

$$\tau_i(r) = \{\mathrm{sgn}[\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\}\,[g_{i\,j}(r)]\,\frac{\mathrm{D}\,\gamma^j}{|\mathrm{D}\,\gamma|}(\sigma). \tag{67}$$

یا،

$$\tau^j(r) = \{\mathrm{sgn}[\ell_\gamma(\sigma,\sigma_0)]\}\,\frac{\mathrm{D}\,\gamma^j}{|\mathrm{D}\,\gamma|}(\sigma). \tag{68}$$

از جمله دیده میشود

$$\tau\cdot\tau = 1. \tag{69}$$

اینها یعنی τ بردارِ یکه یِ مماس بر γ در نقطه یِ r و به سو یِ بیرون است.

5 نیرو

خم ِ γ را ژئُدزیک ی میگیرم که جا یِ ذرات ِ 1 و 2 را به هم وصل میکند. یک تعمیم ِ شکل ِ ضعیف ِ قانون ِ سوم ِ نیوتُن [1] این است که نیرو یی که ذره یِ 1 به ذره یِ 2 وارد میکند قرینه یِ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ نیرو یی ست که ذره یِ 2 به ذره یِ 1 وارد میکند:

$$F_{1\to 2} = -[\mathsf{P}_\gamma(\sigma_2, \sigma_1)]\, F_{1\to 2}. \qquad (70)$$

که σ_a مقدارِ پارامترِ خم متناظر با نقطه یِ r_a است:

$$r_a = \gamma(\sigma_a), \quad a \in \{1, 2\}. \qquad (71)$$

البته انتقال- ِ-موازی با بازپارامترش تغییر نمیکند، و (70) را میشود چنین نوشت.

$$F_{1\to 2} = -[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_2, r_1)]\, F_{2\to 1}. \qquad (72)$$

و رُشن است که این همئرز است یا

$$F_{2\to 1} = -[\mathbf{P}_{[\gamma]}(r_1, r_2)]\, F_{1\to 2}. \qquad (73)$$

نیرو یی که ذره یِ 2 به ذره یِ 1 وارد میکند قرینه یِ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ نیرو یی ست که ذره یِ 1 به ذره یِ 2 وارد میکند.

این تعمیمِ قانونِ سوم خُد-سازگار است؛ اگر ژئُدزیک ی که جا یِ دُ-ذره را به هم وصل میکند، تا حدِ بازپارامترش یکتا باشد؛ یا دست- ِ-کم اثرِ عملگرِ انتقال- ِ-موازی بر ژئُدزیکها یی که جا یِ دُ-ذره را به هم وصل میکنند، بر نیرو یکتا باشد. خُد-سازگاری یِ قانون برا یِ حالت ِ کلیتر هم نجات میابد، اگر نیروها یی که دُ-ذره به وارد میکنند، وقت ی این شرط برقرار نیست هر-دُ صفر یا هر-دُ بینهایت باشند.

یک تعمیمِ شکلِ قوی یِ قانونِ سومِ نیوتُن [1] این میشود که علاوه بر شکلِ ضعیف، هر یک از نیروها یی که دُ-ذره به هم وارد میکنند با مماس بر ژئُدزیک موازی یَند:

$$F_{2\to 1} \parallel (\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma_1). \qquad (74)$$

$$F_{1\to 2} \parallel (\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma_2). \qquad (75)$$

اینها یعنی عددها یِ c_1 و c_2 یی هستند که

$$F_{2\to 1} = c_1\,(\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma_1). \tag{76}$$

$$F_{1\to 2} = c_2\,(\mathrm{D}\,\gamma)(\sigma_2). \tag{77}$$

البته از اینها و شکلِ ضعیفِ قانونِ سوم نتیجه میشود

$$c_2 = -[b(\sigma_2, \sigma_1)]\,c_1. \tag{78}$$

از جمله، با پارامترِ آفین،

$$c_2 = -c_1. \tag{79}$$

این تعمیمِ شکلِ قوی یِ قانونِ سوم خُد-سازگار است؛ اگر راستا یِ مماس بر ژئُدزیکها یی که جا یِ دُ-ذره را به هم وصل میکنند، در جا یِ ذرات یکتا باشد، و اثرِ عملگرِ انتقالِ-موازی بر ژئُدزیکها یی که جا یِ دُ-ذره را به هم وصل میکنند، بر نیرو یکتا باشد. باز، خُد-سازگاری قانون برا یِ حالتِ کلیتر هم نجات میابد، اگر نیروها یی که دُ-ذره به وارد میکنند، وقت ی این شرطها برقرار نیستند هر-دُ صفر یا هر-دُ بینهایت باشند.

6 انرژی یِ پتانسیل

حالت ی را بررسی میکنم که نیروها یی که دُ-ذره به هم وارد میکنند مشتق از یک انرژیِ-پتانسیل است. این یعنی یک U (انرژی-یِ-پتانسیل) هست که تابعِ جا یِ دُ-ذره (و احتمالَن زمان) است، و

$$F_{2\to 1} = -\nabla_1\,U. \tag{80}$$

$$F_{1\to 2} = -\nabla_2\,U. \tag{81}$$

که $(\nabla_a\,\mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به r_a است. در یک فضا یِ خطی، اگر سیستم تقارنِ انتقالی و دورانی داشته باشد انرژی-یِ-پتانسیل تابع ی از فقط فاصله یِ دُ-ذره از هم (و احتمالَن زمان) است. یک تعمیمِ این حالت این است که انرژی-یِ-پتانسیل در فضا یی که لزومَن خطی نیست هم تابع ی از فقط فاصله یِ دُ-ذره از هم (و احتمالَن زمان) است. در این حالت،

$$\nabla_a\,U = \frac{\partial\,U}{\partial\,[\Lambda(r_2,r_1)]}\,\tau_a, \quad a\in\{1,2\}. \tag{82}$$

که τ_a بردارِ یکه یِ مماس بر ژئُدزیکِ واصلِ r_1 و r_2 در نقطه یِ r_a و به سو یِ بیرونِ این ژئُدزیک است. به این ترتیب،

$$F_{2\to 1} = -\frac{\partial\,U}{\partial\,[\Lambda(r_2,r_1)]}\,\tau_1. \tag{83}$$

$$F_{1\to 2} = -\frac{\partial\,U}{\partial\,[\Lambda(r_2,r_1)]}\,\tau_2. \tag{84}$$

دیده میشود با این شکلِ انرژی-یِ-پتانسیل، نیرو شرطها یِ (73) و (76) و (77) را برمیئاورَد. یعنی با این شکلِ انرژی-یِ-پتانسیل، تعمیمِ معرفی-شده برا یِ شکلِ قوی یِ قانونِ سومِ نیوتُن [1] برقرار است.

7 پانوشتها

[1] Newton

[2] محمد خرمی؛ «قانونها یِ نیوتُن» (2004/07/23) X1-025

[3] Levi-Civita