X1-160 (2021/11/26)

سینتیکِ گازها یِ کاملِ نسبیتی I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

میانگینِ توابعِ تکانه (یا سرعت) برا یِ یک گازِ کاملِ تک-اتمی یِ نسبیتی بررسی میشود. حاصل-ِ-ضربِ تکانه-در-سرعت، انرژی، و اندازه یِ سرعت، با تفصیلِ بیشتر مطالعه میشوند.

1 تکانه، تندی، و چگالی

تکانه را با $\boldsymbol{p}$، و $|\boldsymbol{\mathfrak{z}}|$ را با $\mathfrak{z}$ نشان میدهم. متناظر با هر $\mathfrak{X}$ که تابع ی از تکانه است، یک $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}$ هست که

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}). \tag{1}$$

پارامترِ α (تندی) را تابع ی از تکانه تعریف میکنم، چنان که

$$p = c\,m\,\sinh[\alpha_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p})]. \tag{2}$$

که m جرمِ ذره است. گیرم $\mathfrak{X}$ تابع ی از فقط اندازه یِ تکانه است. این یعنی $[\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابعِ فقط ξ است. در این صورت $\mathfrak{X}_\alpha$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\alpha(\alpha). \tag{3}$$

این یعنی

$$\mathfrak{X}_\alpha \circ \alpha_{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}. \tag{4}$$

یا،

$$\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}} \circ (\alpha_{\boldsymbol{p}})^{-1}. \tag{5}$$

البته $(\alpha_{\boldsymbol{p}})^{-1}$ تابع نیست. به هم ین خاطر طرفِ راست، برا یِ همه یِ $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}$ ها خُش-تعریف نیست. اما $|(\alpha_{\boldsymbol{p}})^{-1}|$ تابع است:

$$|(\alpha_{\boldsymbol{p}})^{-1}| = c\, m\, \sinh. \tag{6}$$

پس وقت ی $[\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابعِ فقط ξ است، طرفِ راستِ (5) خُش-تعریف است.

چگالی یِ متناظر با $\mathfrak{z}$ را با $\rho_{\mathfrak{z}}$ نشان میدهم. $\rho_{\boldsymbol{p}}$ چگالی یِ متناظر با تکانه، و ρ_p چگالی یِ متناظر با اندازه یِ تکانه است. $[\rho_p(\xi)]$ با انتگرال-گیری از $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ بر مجموعه یِ $(p=\xi)$ به دست میئاید. و اگر $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابعِ فقط ξ باشد،

$$\rho_p(\xi) = 4\,\pi\,\xi^2\,\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{7}$$

چگالی یِ متناظر با تندی هم ρ_α است:

$$[\rho_\alpha(\lambda)]\,\mathrm{d}\,\lambda = [\rho_p(\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi. \tag{8}$$

که،

$$\lambda = \alpha_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{9}$$

یعنی،

$$\xi = c\, m\, \sinh\lambda. \tag{10}$$

به این ترتیب،

$$\rho_\alpha(\lambda) = c\,m\,(\cosh\lambda)\,\rho_p(c\,m\,\sinh\lambda) \tag{11}$$

و اگر $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابعِ فقط ξ باشد،

$$\rho_\alpha(\lambda) = 4\,\pi\,(c\,m)^3\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\rho_{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}\,c\,m\,\sinh\lambda). \tag{12}$$

که $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ یک بردارِ یکه است.

مقدارِ چشمداشتی یِ $\mathfrak{X}$ را با $\langle\mathfrak{X}\rangle$ نشان میدهم. وقت ی $\mathfrak{X}$ تابع ی از تکانه است،

$$\langle\mathfrak{X}\rangle = \int \mathrm{d}^3\,\xi\,[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\,\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{13}$$

و اگر $\mathfrak{X}$ تابعِ فقط اندازه یِ تکانه باشد،

$$\langle\mathfrak{X}\rangle = \int \mathrm{d}\,\lambda\,[\rho_\alpha(\lambda)]\,\mathfrak{X}_\alpha(\lambda). \tag{14}$$

2 انرژی و چگالی

برا یِ یک گازِ کاملِ کلاسیک (ناکوانتمی) با ملکولها یِ تک-اتمی، چگالی یِ متناظر با هر ملکول چنین است.

$$\rho_{\boldsymbol{p}} = \mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}\,\exp(-\beta\,h_{\boldsymbol{p}}). \tag{15}$$

h انرژی یِ هر ملکول است، که تابعِ فقط تکانه است. (از ساختارِ درونی یِ اتم چشم پوشیده شده.) همچنین،

$$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}\,T}. \tag{16}$$

که T دما ست. $\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}$ هم یک ثابتِ بهنجارش است:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{Z_{\boldsymbol{p}}}. \tag{17}$$

$$Z_{\boldsymbol{p}} = \int \mathrm{d}^3\,\xi\,\exp[-\beta\,h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]. \tag{18}$$

وقت ی $\mathfrak{X}$ تابع ی از تکانه است،

$$\langle \mathfrak{X} \rangle = \frac{1}{Z_{\boldsymbol{p}}} \int \mathrm{d}^3\,\xi\,\{\exp[-\beta\,h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\}\,\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{19}$$

از جمله،

$$\langle h \rangle = -\frac{1}{Z_{\boldsymbol{p}}}\,\frac{\mathrm{d}\,Z_{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\,\beta}. \tag{20}$$

اگر انرژی یِ هر مُلکول تابعِ فقط اندازه یِ تکانه یِ آن ملکول باشد (که اصولَن چنین است)،

$$\rho_\alpha(\lambda) = \mathcal{N}_\alpha\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\exp[-\beta\,h_\alpha(\lambda)]. \tag{21}$$

که $\mathcal{N}_\alpha$ یک ثابتِ بهنجارش است:

$$\mathcal{N}_\alpha = 4\,\pi\,(c\,m)^3\,\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}. \tag{22}$$

و البته،

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{1}{Z_\alpha}. \tag{23}$$

$$Z_\alpha = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\exp[-\beta\,h_\alpha(\lambda)]. \tag{24}$$

به این ترتیب، وقت ی $\mathfrak{X}$ تابع ی از فقط اندازه یِ تکانه است،

$$\langle \mathfrak{X} \rangle = \frac{1}{Z_\alpha} \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\{\exp[-\beta\,h_\alpha(\lambda)]\}\,\mathfrak{X}_\alpha(\lambda). \tag{25}$$

از جمله،

$$\langle h \rangle = -\frac{1}{Z_\alpha}\,\frac{\mathrm{d}\,Z_\alpha}{\mathrm{d}\,\beta}. \tag{26}$$

برا یِ ذره ای بی-ساختار به جرمِ m، رابطه یِ انرژی با تکانه چنین است.

$$h = \sqrt{c^2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + c^4\,m^2}. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}\ \exp(-\beta\,\sqrt{c^2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + c^4\,m^2}). \tag{28}$$

همچنین،

$$h = c^2\,m\,\cosh\alpha. \tag{29}$$

پس،

$$\rho_\alpha(\lambda) = \mathcal{N}_\alpha\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\ \exp(-c^2\,m\,\beta\,\cosh\lambda). \tag{30}$$

سرعت را با $\boldsymbol{v}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial\,[h(\boldsymbol{p})]}{\partial\,\boldsymbol{p}}. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2\,\boldsymbol{p}}{\sqrt{c^2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + c^4\,m^2}}. \tag{32}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2\,\boldsymbol{p}}{h}. \tag{33}$$

$$v = c\,\tanh\alpha. \tag{34}$$

3 میانگینها

وقت ی $\mathfrak{X}$ تابع ی از تکانه است، $\langle\mathfrak{X}\rangle$ از (19) به دست میئاید. اگر $\mathfrak{X}$ تابع ی از فقط اندازه یِ تکانه باشد، $\langle\mathfrak{X}\rangle$ را میشود از (25) به دست آورد.

3.1 تکانه-در-سرعت

حاصل-ِ-ضربِ درونی یِ تکانه در سرعت تابع ی از تکانه است. به این ترتیب،

$$\langle\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle = \int \mathrm{d}^3\,\xi\,[\rho_{\boldsymbol{p}}(\xi)]\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{35}$$

که میشود

$$\langle \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle = \mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}\int \mathrm{d}^3\,\xi\,\{\exp[-\beta\, h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial\,[h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]}{\partial\,\boldsymbol{\xi}}. \tag{36}$$

پس،

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle &= -\frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\int \mathrm{d}^3\,\xi\,\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial\,\{\exp[-\beta\, h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\}}{\partial\,\boldsymbol{\xi}},\\ &= -\frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\int \mathrm{d}^3\,\xi\,\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{\xi}}\cdot\{\boldsymbol{\xi}\,\exp[-\beta\, h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\}\\ &\quad+\frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\int \mathrm{d}^3\,\xi\,\left(\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\exp[-\beta\, h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})],\\ &= -\frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\oint[(\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{S})(\boldsymbol{\xi})]\,\cdot\boldsymbol{\xi}\,\exp[-\beta\, h_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\\ &\quad+\frac{3\,\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\int \mathrm{d}^3\,\xi\,\exp[-\beta\, h(\boldsymbol{\xi})].\end{aligned} \tag{37}$$

جمله ی ِ اول، با فرض ِ این که $h_{\boldsymbol{p}}$ در بینهایت با سرعت ِ کافی بینهایت میشود، صفر است. به این ترتیب،

$$\langle \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})\rangle = \frac{3\,\mathcal{N}_{\boldsymbol{p}}}{\beta}\,Z_{\boldsymbol{p}}. \tag{38}$$

که یعنی،

$$\langle \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})\rangle = 3\,k_{\mathrm{B}}\,T. \tag{39}$$

البته این هم ان قضیه ی ِ هم-پارش است. و برا ی ِ رسیدن به آن شکل ِ بستگی ی ِ انرژی به تکانه، رابطه ی ِ (27)، یا حتا این که انرژی به فقط اندازه ی ِ تکانه بستگی دارد، هم لازم نیست.

3.2 انرژی

میانگین ِ انرژی را میشود از (26) حساب کرد. دیده میشود

$$Z_\alpha = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\exp(-c^2\,m\,\beta\,\cosh\lambda). \tag{40}$$

یا،

$$Z_\alpha = -\frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,x}. \tag{41}$$

که،

$$x = c^2\, m\, \beta. \tag{42}$$

$$W = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\, (\sinh^2 \lambda)\ \exp(-x\, \cosh \lambda). \tag{43}$$

رابطه یِ (43) را چنین مینویسم.

$$W = S_2(x). \tag{44}$$

که،

$$S_n(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\, (\sinh^n \lambda)\ \exp(-x\, \cosh \lambda). \tag{45}$$

(از مثلَن [1]) دیده میشود

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \left(\frac{2}{x}\right)^{n/2}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\, \mathsf{K}_{n/2}(x). \tag{46}$$

که Γ تابعِ گاما ست و K_ν تابعِ بسِلِ [2] دگرگونِ نُعِ-ِ-دوم از مرتبه یِ ν است. به این ترتیب،

$$W = x^{-1}\, \mathsf{K}_1(x). \tag{47}$$

که نتیجه میدهد

$$Z_\alpha = x^{-2}\, \mathsf{K}_1(x) - x^{-1}\, K_1'(x). \tag{48}$$

که $\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است. از (26) و (48) نتیجه میشود

$$\langle h\rangle = (c^2\, m)\, \frac{2\, x^{-3}\, \mathsf{K}_1(x) - 2\, x^{-2}\, \mathsf{K}_1'(x) + x^{-1}\, \mathsf{K}_1''(x)}{x^{-2}\, \mathsf{K}_1(x) - x^{-1}\, K_1'(x)}. \tag{49}$$

که، با استفاده از معادله یِ بسِلِ [2] دگرگون، میشود

$$\langle h\rangle = \frac{c^2\, m}{x}\, \frac{(x^2+3)\, \mathsf{K}_1(x) - 3\, x\, \mathsf{K}_1'(x)}{\mathsf{K}_1(x) - x\, K_1'(x)}. \tag{50}$$

یا،

$$\langle h\rangle = (k_{\rm B}\, T)\,\frac{(x^2+3)\,\mathsf{K}_1(x) - 3\,x\,\mathsf{K}_1'(x)}{\mathsf{K}_1(x) - x\,K_1'(x)}. \tag{51}$$

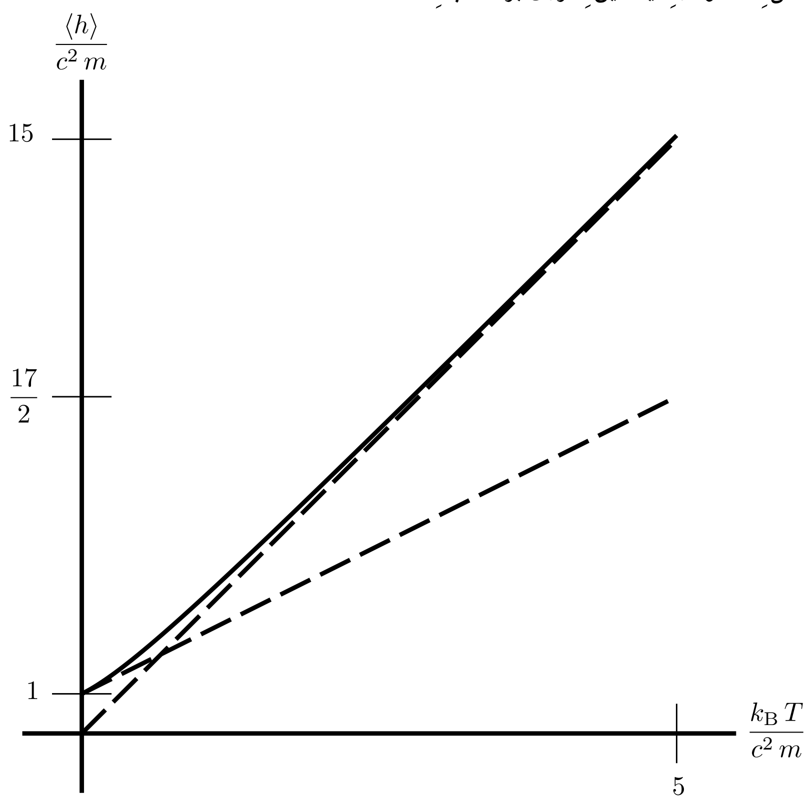
از جمله، با استفاده از رفتار ِ $[\mathsf{K}_\nu(x)]$ برا ی ِ مقدارها ی ِ کوچک و بزرگ ِ x،

$$\langle h\rangle = (c^2\,m) + \frac{3\,k_{\rm B}\,T}{2} + \cdots\,,\quad x\gg 1. \tag{52}$$

$$\langle h\rangle = 3\,k_{\rm B}\,T + \cdots\,,\qquad x\ll 1. \tag{53}$$

روابط ِ (52) و (53) حدها ی، به-ترتیب، دما-ی ِ-کم (نانسبیتی) و دما-ی ِ-زیاد (فرانسبیتی) یَند.

شکل ِ 1 نمودار ِ میانگین ِ انرژی بر حسب ِ دما ست.



شکل ِ 1: میانگین ِ انرژی بر حسب ِ دما

اینها در [3] هم بررسی شده اند.

3.3 سرعت

میانگینِ (اندازه یِ) سرعت را میشود با استفاده از (25) و (34) به دست آورد:

$$\langle v\rangle = \frac{c\,V}{Z_\alpha}. \tag{54}$$

که،

$$V = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\sinh^3\lambda)\,\exp(-c^2\,m\,\beta\,\cosh\lambda). \tag{55}$$

پس،

$$V = S_3(x). \tag{56}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle v\rangle = \frac{c\,S_3(x)}{Z_\alpha}. \tag{57}$$

یعنی،

$$\langle v\rangle = c\,\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\frac{x^{-3/2}\,\mathsf{K}_{3/2}(x)}{x^{-2}\,\mathsf{K}_1(x) - x^{-1}\,K_1'(x)}. \tag{58}$$

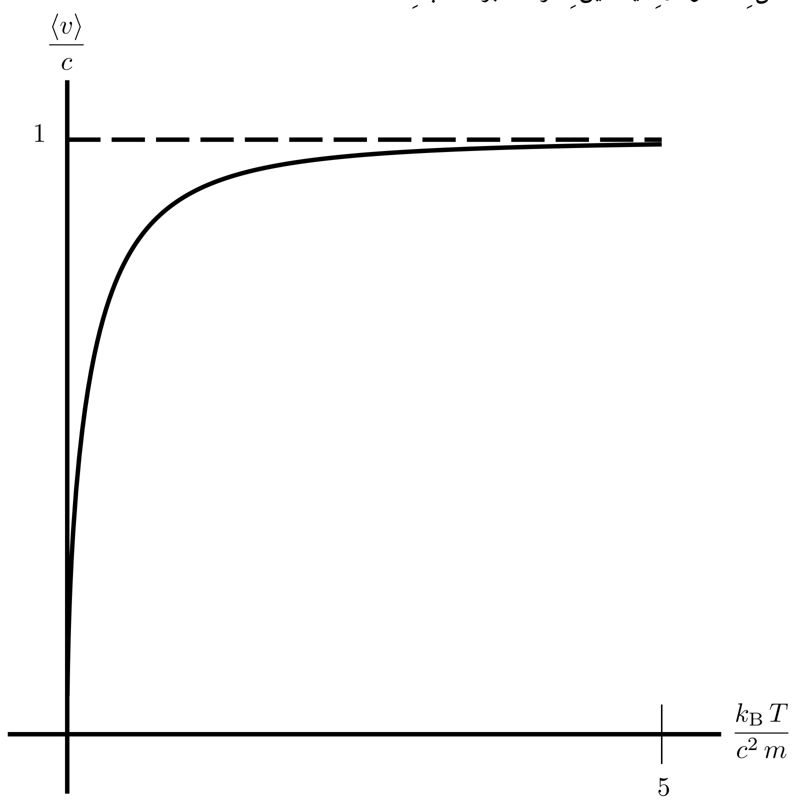
از جمله، با استفاده از رفتارِ $[\mathsf{K}_\nu(x)]$ برا یِ مقدارها یِ کوچک و بزرگِ x،

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8\,k_\mathrm{B}\,T}{\pi\,m}} + \cdots, \quad x \gg 1. \tag{59}$$

$$\langle v\rangle = c + \cdots, \qquad x \ll 1. \tag{60}$$

روابطِ (59) و (60) حدها یِ، به-ترتیب، دما-یِ-کم (نانسبیتی) و دما-یِ-زیاد (فرانسبیتی) یَند.

شکلِ 2 نمودارِ میانگینِ سرعت بر حسبِ دما ست.



شکلِ 2: میانگینِ سرعت بر حسبِ دما

4 پانوشتها

[1] I. S. Gradsgteyn & I. M. Ryzhik; "Table of integrals, series, and products" 7th edition (Academic Press, 2007) section 3.387

[2] Bessel

[3] محمد خرمی؛ «انرژی یِ درونی یِ یک گازِ کاملِ نسبیتی» (2009/10/29) X1-063