X1-161 (2022/01/20)

ظرفیت، دُ بُعد

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

ظرفیت در دُ-بُعد بررسی میشود. برا یِ این کار متغیرها یِ مختلط به کار میروند، که ابزار یِ قدرتمند در دُ-بُعد َند.

0 درامد

این متن را میشود ادامه ای بر [1] و [2] تلقی کرد. خازن را شامل ِ دُ الکترُد ِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$، و دُ کنار ِ $\mathbb{S}_1$ و $\mathbb{S}_2$ تعریف میکنم، چنان که هر یک از الکترُدها و کنارها یکپارچه است، بر هر یک از الکترِدها پتانسیل (u) ثابت است، و بر هر یک از کنارها مشتق ِ پتانسیل در راستا یِ عمود بر کنار صفر است:

$$u(z) = u_j, \quad z \in \mathbb{E}_j. \tag{1}$$

$$(\partial_m\, u)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{S}_j. \tag{2}$$

$(\partial_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{X})$ مشتق ِ سویی ی ِ $\mathfrak{X}$ با $\mathfrak{m}$ است، و m (در یک نقطه ی ِ z از $\mathbb{S}_j$) بر $\mathbb{S}_j$ عمود است. پتانسیل درون ِ خازن همساز است، یعنی معادله ی ِ لَپلَس [3]را برمیئاورَد:

$$(\triangle\, u)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{V}. \tag{3}$$

$\triangle$ لَپلَسی ست. $\mathbb{V}$ درون ِ خازن است، و مرز ِ آن اجتماع ِ الکترُدها و کنارها ست. مرز ِ $\mathfrak{V}$ را با $[\mathbf{b}(\mathfrak{V})]$ نشان میدهم:

$$\mathbf{b}(\mathbb{V}) = \mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2 \cup \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2. \tag{4}$$

1 دُ-بُعد، و نمایش ِ مختلط

در دُ-بُعد، مختصات ِ دِکَرتی ی ِ متناظر با z را با (x, y) نشان میدهم:

$$z = x + \mathrm{i}\, y. \tag{5}$$

مزدوج- ِ-مختلط ِ $\mathfrak{z}$ را هم با $\bar{\mathfrak{z}}$ نشان میدهم. از جمله،

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y. \tag{6}$$

نمایش ِ مختلط برا ی ِ بردار چنین است.

$$\hat{\boldsymbol{x}} \to 1. \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} \to \mathrm{i}. \tag{8}$$

از جمله،

$$\partial_{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{m}}}{2}\, \partial_{\hat{\boldsymbol{x}}} + \frac{\mathfrak{m} - \bar{\mathfrak{m}}}{2\,\mathrm{i}}\, \partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}. \tag{9}$$

یا،

$$\partial_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\, \partial + \bar{\mathfrak{m}}\, \bar{\partial}. \tag{10}$$

که

$$\partial = \frac{1}{2}\,(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}} - \mathrm{i}\,\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}). \tag{11}$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\,(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}} + \mathrm{i}\,\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}). \tag{12}$$

و البته،

$$\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \partial + \bar{\partial}. \tag{13}$$

$$-\mathrm{i}\,\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}} = \partial - \bar{\partial}. \tag{14}$$

به این ترتیب، یک نمایشِ لَپلَسی چنین است.

$$\triangle = 4\,\partial\,\bar{\partial}. \tag{15}$$

∂ مشتق-گیری نسبت به z (در $\bar{z}$ ِ ثابت)، و $\bar{\partial}$ مشتق-گیری نسبت به $\bar{z}$ (در z ِ ثابت) است.

متناظر با با تابعِ همسازِ u، تابعِ همسازِ v تعریف میشود، که به آن مزدوجِ همسازِ u میگویند:

$$\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\,u = \partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\,v. \tag{16}$$

$$-\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\,u = \partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\,v. \tag{17}$$

اینها معادلاتِ کُشی-ریمان [4] اند. بر حسبِ ∂ و $\bar{\partial}$،

$$\partial\,u = \mathrm{i}\,\partial\,v. \tag{18}$$

$$-\bar{\partial}\,u = \mathrm{i}\,\bar{\partial}\,v. \tag{19}$$

تابعِ w را چنین تعریف میکنم.

$$w = u + \mathrm{i}\,v. \tag{20}$$

معادلاتِ کُشی-ریمان [4] چنین میشوند.

$$\bar{\partial}\,w = 0. \tag{21}$$

$$\partial\,\bar{w} = 0. \tag{22}$$

از معادلاتِ کُشی-ریمان [4] نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, u)^2 + (\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\, u)^2 &= (\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, u)^2 + (\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, v)^2, \\
&= (\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, w)\,(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, \bar{w}), \\
&= (\partial\, w + \bar{\partial}\, w)\,(\partial\, \bar{w} + \bar{\partial}\, \bar{w}), \\
&= (\partial\, w)\,(\bar{\partial}\, \bar{w}). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

پس،

$$(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, u)^2 + (\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\, u)^2 = |\partial\, w|^2. \qquad (24)$$

به هم ین ترتیب،

$$(\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, v)^2 + (\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\, v)^2 = |\partial\, w|^2. \qquad (25)$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$|\boldsymbol{\nabla}\, u| = |\partial\, w|. \qquad (26)$$

$$|\boldsymbol{\nabla}\, v| = |\partial\, w|. \qquad (27)$$

که،

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\,\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}. \qquad (28)$$

همچنین،

$$\det \frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = (\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, u)\,(\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\, v) - (\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}\, v)\,(\partial_{\hat{\boldsymbol{y}}}\, u). \qquad (29)$$

که، با استفاده از معادلاتِ کُشی-ریمان [4]، نتیجه میدهد.

$$\det \frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = |\partial\, w|^2. \qquad (30)$$

عنصرِ مساحت را با $(\mathrm{d}\, a)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{d}\, a = (\mathrm{d}\, x)\, (\mathrm{d}\, y). \tag{31}$$

دیده میشود

$$(\mathrm{d}\, u)\, (\mathrm{d}\, v) = \left|\det \frac{\partial\, (u, v)}{\partial\, (x, y)}\right|\, (\mathrm{d}\, x)\, (\mathrm{d}\, y). \tag{32}$$

پس،

$$(\mathrm{d}\, u)\, (\mathrm{d}\, v) = |\partial\, w|^2\, (\mathrm{d}\, x)\, (\mathrm{d}\, y). \tag{33}$$

که یعنی،

$$\mathrm{d}\, a = \frac{(\mathrm{d}\, u)\, (\mathrm{d}\, v)}{|\partial\, w|^2}. \tag{34}$$

با استفاده از معادلاتِ کُشی-ریمان [4]مشتقِ w و $\bar{w}$ را هم میشود چنین نوشت.

$$\partial\, w = \frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, z}. \tag{35}$$

$$\bar{\partial}\, \bar{w} = \frac{\mathrm{d}\, \bar{w}}{\mathrm{d}\, \bar{z}}. \tag{36}$$

و البته،

$$\bar{\partial}\, \bar{w} = \overline{(\partial\, w)}. \tag{37}$$

عنصرِ طول را با $(\mathrm{d}\, \ell)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{d}\, \ell = |\mathrm{d}\, z|. \tag{38}$$

دیده میشود

$$|\mathrm{d}\, w| = |\partial\, w|\, |\mathrm{d}\, z|. \tag{39}$$

که یعنی،

$$\mathrm{d}\, \ell = \frac{|\mathrm{d}\, w|}{|\partial\, w|}. \tag{40}$$

2 معادله و شرایطِ مرزی

شرط- ِ-مرزی یِ (2) چنین است.

$$(m\,\partial\,u + \bar{m}\,\bar{\partial}\,u)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{S}_j. \tag{41}$$

معادله یِ (3) این است که u (درونِ $\mathbb{V}$) همساز است. پس u یک مزدوج- ِ-همساز دارد. مزدوج- ِ-همساز u را با v نشان میدهم. با استفاده از معادلاتِ کُشی-ریمان [4]، شرط- ِ-مرزی یِ (41) چنین میشود.

$$(n\,\partial\,v + \bar{n}\,\bar{\partial}\,v)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{S}_j. \tag{42}$$

که،

$$n = \mathrm{i}\,m. \tag{43}$$

رابطه یِ (42) یعنی

$$(\partial_n\,v)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{S}_j. \tag{44}$$

رابطه یِ (43) هم یعنی n بر m عمود است، پس n بر $\mathbb{S}_j$ مماس است. به این ترتیب، (44) یعنی v بر $\mathbb{S}_j$ ثابت است. پس شرط- ِ-مرزی یِ (2) همئرز است با این که v بر هر یک از کنارها ثابت است:

$$v(z) = v_j, \qquad z \in \mathbb{S}_j. \tag{45}$$

معادله یِ (3) هم چنین میشود.

$$(\partial\,\bar{\partial}\,u)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{V}. \tag{46}$$

3 بار و ظرفیت

(اندازه یِ) بار-بر-طول بر الکترُدِ j را با q_j نشان میدهم. q_j تقسیم بر ε (پذیرفتاری) انتگرالِ اندازه یِ میدانِ الکتریکی بر $\mathbb{E}_j$ است:

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{E}_j} (\mathrm{d}\,\ell)\,|\boldsymbol{\nabla}\,u|. \tag{47}$$

که، با استفاده از (26)، چنین میشود.

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{E}_j} (\mathrm{d}\,\ell)\,|\partial\,w|. \tag{48}$$

یا، با استفاده از (40)،

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\tilde{\mathbb{E}}_j} |\mathrm{d}\,w|. \tag{49}$$

$\tilde{\mathbb{E}}_j$ تصویرِ $\mathbb{E}_j$ در صفحه یِ w است. u بر $\mathbb{E}_j$ (یا تصویرَش $\tilde{\mathbb{E}}_j$) ثابت است. پس،

$$\mathrm{d}\,w = \mathrm{i}\,\mathrm{d}\,v, \quad z \in \mathbb{E}_j. \tag{50}$$

و (49) چنین میشود.

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\tilde{\mathbb{E}}_j} |\mathrm{d}\,v|. \tag{51}$$

v بر $\mathbb{E}_j$، از یک سر تا سرِ دیگر، یکنوا تغییر میکند. پس

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \Delta\,v. \tag{52}$$

که $(\Delta\,v)$ اختلافِ مقدارها یِ v در دُ-سرِ $\mathbb{E}_j$ است، که هم ان اختلافِ مقدارها یِ v در $\mathbb{S}_1$ و $\mathbb{S}_2$ است:

$$\Delta\,v = |v_2 - v_1|. \tag{53}$$

از جمله دیده میشود اندازه یِ بار-بر-طول، در الکترُدها یِ 1 و 2 یکسان است:

$$q_2 = q_1. \tag{54}$$

این مقدارِ مشترک را با q نشان میدهم:

$$\frac{q}{\varepsilon} = \Delta\, v. \tag{55}$$

به q بار-بر-طولِ خازن میگویم. ظرفیت-بر-طولِ خازن را با c نشان میدهم. ظرفیت-بر-طولِ خازن برابر است با بار-بر-طولِ خازن تقسیم بر اختلاف-ِ-پتانسیلِ الکترُدها یِ خازن:

$$c = \frac{q}{\Delta\, u}. \tag{56}$$

که،

$$\Delta\, u = |u_2 - u_1|. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{\Delta\, v}{\Delta\, u}. \tag{58}$$

4 انرژی و ظرفیت

انرژی-بر-طول را با h نشان میدهم. h تقسیم بر $(\varepsilon/2)$ انتگرالِ مجذورِ اندازه یِ میدانِ الکتریکی بر $\mathbb{V}$ است:

$$\frac{2\,h}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,a)\, |\boldsymbol{\nabla}\, u|^2. \tag{59}$$

که، با استفاده از (26)، چنین میشود.

$$\frac{2\,h}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,a)\, |\partial\, w|^2. \tag{60}$$

یا، با استفاده از (34)،

$$\frac{2\,h}{\varepsilon} = \int_{\tilde{\mathbb{V}}} (\mathrm{d}\,u)\,(\mathrm{d}\,v). \tag{61}$$

$\tilde{\mathbb{V}}$ تصویرِ $\mathbb{V}$ در صفحه یِ w است. و (61) چنین میشود.

$$\frac{2\,h}{\varepsilon} = (\Delta\,u)\,(\Delta\,v). \tag{62}$$

ظرفیت- بر- طولِ خازن برابر است بادُ- برابرِ انرژی- بر- طولِ خازن تقسیم بر مجذورِ اختلاف- ِ- پتانسیلِ الکترُدها یِ خازن:

$$c = \frac{2\,h}{(\Delta\,u)^2}. \tag{63}$$

به این ترتیب،

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{(\Delta\,u)\,(\Delta\,v)}{(\Delta\,u)^2}. \tag{64}$$

که هم ان (58) است.

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نگاشتِ همدیس و مسئله یِ پُوَسُن در دوبُعد» (2010/05/27) X1-068

[2] محمد خرمی؛ «مسئله یِ دیریکله برا یِ قرص، با استفاده از نگاشتِ همدیس» X1-143 (2019/10/21)

[3] Laplace

[4] Cauchy-Riemann