X1-163 (2022/04/14)

معادله یِ پُوَسُن بر کره

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

معادله یِ پُوَسُن [1] بر کره بررسی میشود؛ مشخصَن چشمه یِ نقطِئی، تابعِ گرین [2]، و جواب به دُ-قطبی یِ نقطِئی.

1 لَپلَسی

معادله یِ پُوَسُن [1] برا یِ ψ چنین است.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi = f. \tag{1}$$

که f چشمه (یک تابعِ معلوم) است، و $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})$ لَپلَسی ست:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{X} = \frac{1}{\mathsf{vd}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^i}\,\left(\mathsf{vd}\,g^{i\,j}\,\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^j}\right). \tag{2}$$

که g متریک و vd ضریبِ $(\mathrm{d}^n\,x)$ در عنصر-ِ-حجم $(\mathrm{d}\,V)$ است:

$$\mathrm{d}\,V = (\mathrm{d}^n\,x)\,\mathsf{vd}. \tag{3}$$

رابطه یِ vd با متریک چنین است.

$$\mathsf{vd} = \sqrt{|\det(g\,\delta_e)|}. \tag{4}$$

که δ_{e}، که به پایه یِ e بستگی دارد، چنین است.

$$\delta_e\, e^i = e_i. \tag{5}$$

به این ترتیب،

$$(\delta_e)^{i\,j} = \delta^{i\,j}. \tag{6}$$

یعنی ماتریسِ متناظر با δ_e، در پایه یِ e قطری ست و اعضا یِ رو-یِ-قطرَ ش یک َند. پس vd جذرِ قدر- ِ-مطلقِ دترمینانِ ماتریسِ متریک است.

از جمله، برا یِ کره با مختصاتِ (θ, ϕ)، بخشِ زاویئی یِ مختصاتِ کروی،

$$(x^1, x^2) = (\theta, \phi). \tag{7}$$

$$(g_{1\,1}, g_{1\,2}, g_{2\,1}, g_{2\,2}) = (1, 0, 0, \sin^2\theta). \tag{8}$$

$$(g^{1\,1}, g^{1\,2}, g^{2\,1}, g^{2\,2}) = (1, 0, 0, \sin^{-2}\theta). \tag{9}$$

$$\mathsf{vd} = \sin\theta. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{X} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\,\left[(\sin\theta)\,\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\,\mathfrak{X}}{\partial\,\phi^2}. \tag{11}$$

2 چشمه

وقت ی ناحیه یِ $\mathbb{V}$، که معادله یِ پُوَسُن بر آن نوشته شده، فشرده و بی-مرز است، چشمه نمیتواند دلبخاه باشد: به خاطرِ قضیه یِ دیورژانس،

$$\int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V)\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi = \oint_{\mathsf{bo}(\mathbb{V})} (\mathrm{d}\,\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi. \tag{12}$$

که $[\mathsf{bo}(\mathbb{V})]$ مرزِ $\mathbb{V}$ است. وقت ی $\mathbb{V}$ بی-مرز است، انتگرالِ طرفِ راست صفر است. پس معادلاتِ (1) و (12) نتیجه میدهند

$$\int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V)\, f = 0. \tag{13}$$

از جمله، معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه یِ نقطِئی جواب ندارد. چشمه-یِ-نقطِئی یِ اصلاح-شده را با $\tilde{\delta}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \kappa(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'). \tag{14}$$

δ دلتا یِ دیرَک [3] است:

$$\int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V)\, [\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, \mathfrak{X}(\boldsymbol{r}) = \mathfrak{X}(\boldsymbol{r}'). \tag{15}$$

و κ چنان است که،

$$\int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V)\, [\kappa(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] = 1. \tag{16}$$

تابعِ κ، جز رابطه یِ بالا دلبخاه است. از جمله میشود آن را ثابت گرفت:

$$\kappa(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{V}. \tag{17}$$

که V حجمِ $\mathbb{V}$ است. از این پس κ را ثابت میگیرم. به این ترتیب،

$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \frac{1}{V}. \tag{18}$$

3 تابع-ِ-گرین

انتظار میرفت تابعِ گرین [2] جوابِ معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه یِ نقطِئی باشد. اما وقت ی ناحیه یِ $\mathbb{V}$، که معادله یِ پُوَسُن بر آن نوشته شده، فشرده و بی-مرز است، معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه یِ نقطِئی جواب

ندارد. در این حالت تابعِ گرین [2] را جوابِ معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه-یِ-نقطِئی یِ اصلاح-شده تعریف میکنم:

$$(\nabla\cdot\nabla\, G)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \tilde{\delta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{19}$$

که G تابعِ گرین است. تابعِ گرین [2] برا یِ کره را با $G_{\mathbb{S}}$ نشان میدهم. از تقارنِ دورانی معلوم میشود $[G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]$ تابعِ فقط زاویه یِ $\boldsymbol{r}$ با $\boldsymbol{r}'$ است. این زاویه را با $[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]$ نشان میدهم:

$$G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{G}_{\mathbb{S}}[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]. \tag{20}$$

از جمله،

$$\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \theta. \tag{21}$$

که $\boldsymbol{n}$ قطبِ شمالِ کره است. (20) و (21) نتیجه میدهند

$$G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta). \tag{22}$$

به این ترتیب، از معادله یِ تابعِ گرین [2] برا یِ $[G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})]$ نتیجه میشود

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\left\{(\sin\theta)\,\frac{\mathrm{d}\,[\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta}\right\} = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) - \frac{1}{4\,\pi}. \tag{23}$$

که $(4\,\pi)$ مساحتِ کره (یِ یکه) است. (مساحت هم ان حجمِ دُ بُعدی ست.) از رابطه یِ (23) برا یِ θ یِ ناصفر نتیجه میشود

$$(\sin\theta)\,\frac{\mathrm{d}\,[\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta} = \frac{1}{4\,\pi}\,(c+\cos\theta). \tag{24}$$

که c ثابت است. به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta} = \frac{1}{4\,\pi}\,\frac{c+\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{25}$$

زاویه یِ θ در قطبِ شمال صفر، و در قطبِ جنوب π است. $[G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{.}, \boldsymbol{n})]$ همه-جا خُش-رفتار است، جز در قطبِ شمال. که یعنی $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ هم-جا خُش-رفتار است، جز در صفر. از جمله، $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ در π خُش-رفتار است. پس طرفِ راستِ (25) باید در $(\theta \to \pi)$ حد (ِ کراندار) داشته باشد. این نتیجه میدهد

$$c = 1. \tag{26}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta} = \frac{1}{4\,\pi}\,\cot\frac{\theta}{2}. \tag{27}$$

و از آنجا،

$$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\theta) = \frac{1}{2\,\pi}\,\left[\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{\gamma_0}{2}\right)\right]. \tag{28}$$

γ_0 یک ثابت است. این ثابت از معادله یِ حاکم بر $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ تعیین نمیشود، چون با مشتق-گیری از $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ حذف میشود.

این شکلِ $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$، از حلِ معادله در $(\theta \neq 0)$، یعنی بیرونِ قطب- ِشمال، به دست آمد. برا یِ بررسی یِ معادله در قطبِ شمال، از $[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,G_{\mathbb{S}})(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})]$ بر یک عرق-چین به مرکزِ قطب- ِشمال انتگرال میگیرم:

$$\int_{\theta<\zeta}(\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,G_{\mathbb{S}})(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = \int_{\theta<\zeta}(\mathrm{d}\,V)\,\left[\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) - \frac{1}{4\,\pi}\right]. \tag{29}$$

در طرفِ چپ قضیه یِ دیورژانس را به کار میبَرم. در طرفِ راست هم انتگرالِ δ را حساب میکنم:

$$\int_{\theta=\zeta}(\mathrm{d}\,\boldsymbol{S})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,G_{\mathbb{S}})(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = 1 - \frac{1}{4\pi}\,\int_{\theta<\zeta}(\mathrm{d}\,V). \tag{30}$$

البته اینجا $(\mathrm{d}\,V)$ عنصر- ِحجمِ دُ-بُعدی (عنصرِ مساحت)، و $(\mathrm{d}\,\boldsymbol{S})$ عنصر- ِمساحتِ یک-بُعدی (عنصرِ طول) است. رابطه یِ بالا چنین میشود.

$$\int_0^{2\,\pi}(\mathrm{d}\,\phi)\,(\sin\zeta)\,(\mathrm{D}\,\mathcal{G}_{\mathbb{S}})(\zeta) = 1 - \frac{1}{4\pi}\,\int_0^{\zeta}(\mathrm{d}\,\theta)\,(\sin\theta)\,\int_0^{2\,\pi}(\mathrm{d}\,\phi). \tag{31}$$

که $(\mathrm{D}\,\mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است. در طرفِ چپِ رابطه یِ بالا رابطه یِ (27) را به کار میبَرم. انتگرالِ طرفِ راست را هم حساب میکنم:

$$\frac{1}{2}\,(\sin\zeta)\,\cot\frac{\zeta}{2}=1-\frac{1-\cos\zeta}{2}. \tag{32}$$

که اتحاد است. پس $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ به شکلِ (28)، معادله یِ تابعِ گرین [2] را همه-جا، از جمله در قطبِ شمال، بر میئاورَد.

به این ترتیب،

$$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\gamma)=\frac{1}{2\,\pi}\,\left[\ln\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)-\ln\left(\sin\frac{\gamma_0}{2}\right)\right]. \tag{33}$$

یا،

$$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(\gamma)=\frac{1}{4\,\pi}\,\ln\left(\frac{1-\cos\gamma}{1-\cos\gamma_0}\right). \tag{34}$$

که یعنی،

$$G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\,\pi}\,\ln\left\{\frac{1-\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]}{1-\cos\gamma_0}\right\}. \tag{35}$$

البته،

$$\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=(\cos\theta)\,(\cos\theta')+(\sin\theta)\,(\sin\theta')\,\cos(\phi-\phi'). \tag{36}$$

مکان بر کره را با یک بردارِ یکه (جهت) در یک فضا یِ سه-بُعدی متناظر میکنم، که کره در آن نشسته. به این ترتیب،

$$\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{37}$$

ضرب- -درونی یی که در (37) به کار رفته ضرب- ِ-درونی یِ فضا یِ سه-بُعدی ست، که کره در آن نشسته. البته ضرب- ِ-درونی بر کره هم هم ین است، که برا یِ بردارها یِ مماس بر کره به کار میرود. با استفاده از (37)، رابطه یِ (35) چنین میشود.

$$G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\,\pi}\,\ln\left(\frac{1-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{1-\cos\gamma_0}\right). \tag{38}$$

(بخش ی از) اینها در [4] هم آمده.

4 دُ- قطبی یِ نقطِئی

چشمه یِ متناظر با دُ- قطبی یِ نقطِئی را با $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}$ نشان میدهم. این چشمه به شکلِ زیر به چشمه یِ نقطِئی مربوط است.

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\delta)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}). \tag{39}$$

$\boldsymbol{a}$ جا یِ دُ- قطبی، و $\boldsymbol{p}$ بردارِ دُ- قطبی ست. جوابِ معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه یِ $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}$ را با $\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}} = f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}. \tag{40}$$

از رابطه یِ (18) معلوم میشود $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}$ را میشود به شکلِ (39) اما با چشمه-ی-نقطِئی یِ اصلاح-شده به جا یِ چشمه یِ نقطِئی هم نوشت:

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\tilde{\delta})(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}). \tag{41}$$

از رابطه یِ (19) هم دیده میشود

$$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}})\,G](\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\tilde{\delta})(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}). \tag{42}$$

پس برا یِ $\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}$ این پیشنهاد میشود.

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,G)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}). \tag{43}$$

این را برا یِ کره به کار میبَرم:

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,G_{\mathbb{S}})(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}). \tag{44}$$

و، با استفاده از (20)،

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\,[G_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]}{\mathrm{d}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}}\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}. \tag{45}$$

که، با استفاده از (35)، چنین میشود.

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(4\,\pi)\,\{1-\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}}\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}. \qquad (46)$$

مختصاتِ کروی یِ $\boldsymbol{a}$ را با (α,β) نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\mathfrak{X} = \boldsymbol{e}_1\,\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\alpha} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{\sin\alpha}\,\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\beta}. \qquad (47)$$

که $\boldsymbol{e}_i$ بردار- ِ-یکهِ یِ متناظر با مختصه یِ i ُم است. از (36) و (47) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\} = [\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{a})]\,[-(\sin\alpha)\,(\cos\theta)+(\cos\alpha)\,(\sin\theta)\,\cos(\phi-\beta)] + [\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{a})]\,(\sin\theta)\,\sin(\phi-\beta). \qquad (48)$$

بردارها یِ $\boldsymbol{e}_1$ و $\boldsymbol{e}_2$ تابعِ مکان َاند، و در رابطه یِ بالا در نقطه یِ $\boldsymbol{a}$ حساب شده اند. از (36) و (48) دیده میشود

$$|\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}|^2 = 1-\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}^2. \qquad (49)$$

یا،

$$|\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}| = \sin[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]. \qquad (50)$$

اینجا هم، استفاده از فضا یِ سه-بُعدی یی که کره در آن نشسته مفید است. عملگرِ مشتق-گیری در این فضا-یِ-سه-بُعدی را با $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ نشان میدهم. عملگرِ مشتق-گیری بر کره تصویرِ قائمِ $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ بر کره است:

$$\boldsymbol{\nabla} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}). \qquad (51)$$

و البته،

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}). \qquad (52)$$

همچنین،

$$\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})] = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}. \qquad (53)$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\{\cos[\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})]\}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{54}$$

و (46) چنین میشود.

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{1-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{55}$$

البته $\boldsymbol{p}$ بر کره (در $\boldsymbol{a}$) مماس است، پس $\boldsymbol{p}$ بر $\boldsymbol{a}$ عمود است:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}=0. \tag{56}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$\psi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{1-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{58}$$

5 پانوشتها

[1] Poisson

[2] Green

[3] Dirac

[4] محمد خرمی؛ «تابع- ِ-گرینها یِ معادله یِ پُوَّسُن و معادله یِ پخش در کره و صفحه: انقباض» X1-003 (2001/06/28)