X1-164 (2022/05/19)

تبخیرِ یک مخلوط

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

وقت ی یک مخلوط بخار میشود، در حالتِ کلی کسرِ یک جزئ در بخار با کسرِ آن جزئ در مایع متفاوت است. در نتیجه، با تبخیرِ مخلوط کسرِ اجزا در مایع تغییر میکند. تحولِ کسرها در حالتها یِ مختلف بررسی میشود.

1 معادله یِ تحول

یک مخلوط- ِ-مایعِ همگن از اجزا یی خالص ساخته شده. مقدارِ جزئِ i در مخلوط را با ν_i، و مقدارِ کلِ مخلوط را با n نشان میدهم. کسرِ مُلی یِ جزئِ i در مخلوط را با x_i، و کسرِ مُلی یِ جزئِ i در بخار ی که از مخلوط بیرون میرود را با y_i نشان میدهم. دیده میشود

$$\sum_i \nu_i = n. \tag{1}$$

$$x_i = \frac{\nu_i}{n}. \tag{2}$$

و البته،

$$\sum_i x_i = 1. \tag{3}$$

$$\sum_i y_i = 1. \tag{4}$$

معادله یِ تحول برا یِ مقدارِ جزئِ i در مخلوط چنین به دست میئاید.

$$\mathrm{d}\,\nu_i = y_i\,\mathrm{d}\,n. \tag{5}$$

قرینه یِ طرفِ راست، مقدار ی از جزئِ i است که از مخلوط بیرون میرود، وقت یِ تغییرِ مقدارِ کلِ مخلوط ($\mathrm{d}\,n$) است. طرفِ چپ را هم میشود، با استفاده از (2)، بر حسبِ x_i و n نوشت. به این ترتیب،

$$\mathrm{d}\,(x_i\,n) = y_i\,\mathrm{d}\,n. \tag{6}$$

که نتیجه میدهد

$$\dot{x}_i = w_i. \tag{7}$$

که،

$$\dot{\mathfrak{X}} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{X}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{d}\,n}{n}. \tag{9}$$

$$w_i = y_i - x_i. \tag{10}$$

رُشن است که

$$t = \ln\frac{n}{m}. \tag{11}$$

که m یک ثابت است. همچنین،

$$\sum_i w_i = 0. \tag{12}$$

$$\sum_i \dot{x}_i = 0. \tag{13}$$

هر یک از کسر- ِ-مُلیها یِ بخار ِ بیرون-رونده، تابع ی از کسر- ِ-مُلیها یِ مخلوط، و البته شرایط ِ محیط، است. مهمترین اثر ِ محیط دما ست: در تقریب ی که مایع تراکم-ناپذیر و بخار مخلوط ی از گازها یِ آرمانی فرض میشود، تنها-اثر ِ محیط دما ست. اگر مخلوط در حال ِ جوشیدن نگه داشته شود، دما هم تابع ی از کسر- ِ-مُلیها یِ مخلوط است. پس در این حالت، یا در حالت ی که دما ثابت نگه داشته شود، طرف ِ راست ِ (7) تابع ی از فقط کسر- ِ-مُلیها یِ مخلوط است، و دستگاه ِ (7) یک دستگاه ِ خُد-گردان است. در ادامه، فرض میکنم دستگاه ِ (7) خُد-گردان است.

2 مخلوط ِ دُ-جزئی

وقت ی مخلوط شامل ِ دُ جزئ است، تعداد ِ کسر- -مُلیها یِ مستقل در مخلوط یک است، و تعداد ِ کسر- -مُلیها یِ مستقل در بخار ی که از مخلوط بیرون میرود هم یک است. در این حالت تنها-معادله یِ مستقل ِ دستگاه ِ (7) چنین میشود

$$\dot{x} = w. \tag{14}$$

که یک ی از انتخابها یِ زیر انجام شده.

$$(x, y, w) = (x_1, y_1, w_1). \tag{15}$$

یا،

$$(x, y, w) = (x_2, y_2, w_2). \tag{16}$$

خُدِ w هم تابع ی از فقط یک متغیر، x، است. و این ویژگیها را دارد.

$$w(0) = 0. \tag{17}$$

$$w(1) = 0. \tag{18}$$

و البته،

$$-1 < w < 1. \tag{19}$$

در ادامه فقط مخلوطها یِ دُ-جزئی را بررسی میکنم.

3 تعادل

برا یِ مخلوطها یِ دُ-جزئی، معادله یِ تحول معادله یِ (14) است. c یک نقطه یِ تعادل است، اگر

$$w(c) = 0. \tag{20}$$

به این ترتیب رُشن است که معادله یِ (14) دست- ـِ کم دُ نقطه یِ تعادل دارد: 0 و 1 نقاطِ تعادلَند.

وقت ی مخلوط بخار میشود، n و در نتیجه t کم میشود: تحولِ دستگاه (تبخیرِ مخلوط) به سو یِ کاهشِ t است. نقطه-یِ-تعادلِ c پایدار (ناپایدار) است، اگر برا یِ نقاطِ نزدیک به c تحولِ دستگاه چنان باشد که نقطه به c نزدیک شود (از c دور شود). پس نقطه-یِ-تعادلِ c پایدار است، اگر مشتقِ x نسبت به t در نزدیکی یِ c با $(x-c)$ هم-علامت باشد؛ و نقطه-یِ-تعادلِ c ناپایدار است، اگر مشتقِ x نسبت به t در نزدیکی یِ c با $(x-c)$ ناهم-علامت باشد. یعنی نقطه-یِ-تعادلِ c پایدار است، اگر w در نزدیکی یِ c با $(x-c)$ هم-علامت باشد؛ و نقطه-یِ-تعادلِ c ناپایدار است، اگر w در نزدیکی یِ c با $(x-c)$ پادهم-علامت باشد. وقت ی w در c مشتق-پذیر است و $[w'(c)]$ ناصفر است (که $\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است)؛ نقطه-یِ-تعادلِ c پایدار است، اگر $[w'(c)]$ مثبت باشد؛ و نقطه-یِ-تعادلِ c ناپایدار است، اگر $[w'(c)]$ منفی باشد.

یک حالتِ ساده این است که w تغییر- ـِ علامت نمیدهد. در این حالت تنها-نقاطِ تعادل هم ان 0 و 1َند. اگر w (جز در 0 و 1) مثبت باشد، 0 پایدار و 1 ناپایدار است، و اگر w (جز در 0 و 1) منفی

باشد، 0 ناپایدار و 1 پایدار است:

$$w[(0,1)] \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow \tag{21}$$

0 پایدار و 1 ناپایدار است. (22)

$$w[(0,1)] \subseteq \mathbb{R}^- \Rightarrow \tag{23}$$

0 ناپایدار و 1 پایدار است. (24)

که $\mathbb{R}^+$ مجموعه یِ عددها یِ مثبت است، و $\mathbb{R}^-$ مجموعه یِ عددها یِ منفی ست.

یک مثالِ ساده برا یِ این حالتها چنین است.

$$w = a\,x\,(1-x). \tag{25}$$

که a ثابت است. برا یِ این مثال، حلِ معادله یِ (14) چنین میشود.

$$a\,t = \ln\frac{x}{1-x}. \tag{26}$$

که ثابتِ انتگرال-گیری در t جذب شده. بر حسبِ n هم،

$$\left(\frac{n}{m}\right)^a = \frac{x}{1-x}. \tag{27}$$

که نتیجه میدهد

$$x = \left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{-a}\right]^{-1}. \tag{28}$$

x نسبت به n صعودی (نزولی) ست، اگر a مثبت (منفی) باشد. همچنین؛ 0 پایدار و 1 ناپایدار است، اگر a مثبت باشد؛ و 0 ناپایدار و 1 پایدار است، اگر a منفی باشد.

4 تعادلِ نابدیهی

میگویم نقطه-یِ-تعادلِ c نابدیهی ست، وقت یِ c صفر یا یک نباشد. اگر فقط یک نقطه-یِ-تعادلِ نابدیهی وجود داشته باشد، نقاطِ تعادل 0 و c و 1 اند، که c در $(0,1)$ است. در این صورت چهار حالت

برا یِ علامتِ w در ناحیها یِ مختلف ممکن است:

$$\Big(\{w[(0,c)] \subseteq \mathbb{R}^+\} \wedge \{w[(c,1)] \subseteq \mathbb{R}^+\}\Big) \Rightarrow \tag{29}$$

(30) 0 پایدار است. c و 1 ناپایدار َند.

$$\Big(\{w[(0,c)] \subseteq \mathbb{R}^+\} \wedge \{w[(c,1)] \subseteq \mathbb{R}^-\}\Big) \Rightarrow \tag{31}$$

(32) 0 و 1 پایدار َند. c ناپایدار است.

$$\Big(\{w[(0,c)] \subseteq \mathbb{R}^-\} \wedge \{w[(c,1)] \subseteq \mathbb{R}^+\}\Big) \Rightarrow \tag{33}$$

(34) c پایدار است، 0 و 1 ناپایدار َند.

$$\Big(\{w[(0,c)] \subseteq \mathbb{R}^-\} \wedge \{w[(c,1)] \subseteq \mathbb{R}^-\}\Big) \Rightarrow \tag{35}$$

(36) 1 پایدار است، 0 و c ناپایدار َند.

جز در حالتِ خاص ی که w در c کمینه یا بیشینه میشود، w در c تغییر- ِ-علامت میدهد. یک مثالِ ساده برا یِ این حالتها یِ نا-خاص چنین است.

$$w = a\,x\,(x-c)\,(1-x). \tag{37}$$

که a ثابت است. برا یِ این مثال، حلِ معادله یِ (14) چنین میشود.

$$a\,c\,(1-c)\,t = \ln\frac{|x-c|}{x^{1-c}\,(1-x)^c}. \tag{38}$$

که ثابتِ انتگرال-گیری در t جذب شده. بر حسبِ n هم،

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{a\,c\,(1-c)} = \frac{|x-c|}{x^{1-c}\,(1-x)^c}. \tag{39}$$

c پایدار است، یعنی x با کاهشِ n به c نزدیک میشود، اگر a مثبت باشد. در این حالت x، در $(n\to 0)$ به c میگراید.

c ناپایدار است، یعنی x با کاهشِ n از c دور میشود، اگر a منفی باشد. در این حالت x؛ اگر ابتدا کوچکتر از c باشد، در $(n \to 0)$ به 0 میگراید؛ و اگر ابتدا بزرگتر از c باشد، در $(n \to 0)$ به 1 میگراید.

یک مثالِ ساده برا یِ حالتها یِ خاص، که w در c کمینه یا بیشینه میشود، چنین است.

$$w = a\,x\,(x-c)^2\,(1-x). \tag{40}$$

که a ثابت است. برا یِ این مثال، حلِ معادله یِ (14) چنین میشود.

$$a\,c^2\,(1-c)^2\,t = -\frac{c\,(1-c)}{x-c} + \ln\frac{x^{(1-c)^2}\,|x-c|^{2\,c-1}}{(1-x)^{c^2}}. \tag{41}$$

که ثابتِ انتگرال-گیری در t جذب شده. بر حسبِ n هم،

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{a\,c^2\,(1-c)^2} = \frac{x^{(1-c)^2}\,|x-c|^{2\,c-1}}{(1-x)^{c^2}}\;\exp\left[-\frac{c\,(1-c)}{x-c}\right]. \tag{42}$$

وقت ی a مثبت است، w در c کمینه است. در این حالت x با کاهشِ n؛ اگر ابتدا کوچکتر از c باشد به 0، و اگر ابتدا بزرگتر از c باشد به c میگراید.

وقت ی a منفی ست، w در c بیشینه است. در این حالت x با کاهشِ n؛ اگر ابتدا کوچکتر از c باشد به c، و اگر ابتدا بزرگتر از c باشد به 1 میگراید.