X1-165 (2022/07/22)

معادله یِ پُوَسُن در یک ستون

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

معادله یِ پُوَسُن [1] در یک ستون بررسی میشود. خُد ِ معادله-یِ-دیفرانسیل جداشدنی ست. حالت ی بررسی میشود که هندسه یِ شرط- ِ-مرزی هم جداشدنی ست. در این صورت کل ِ مسئله جداشدنی ست. تابع ِ گرین [2] برا یِ مسئله یِ با شرط- ِ-مرزی یِ مخلوط به دست میئاید.

1 معادله یِ پُوَسُن، و تابع ِ گرین

معادله یِ پُوَسُن [1] با چشمه یِ J برا یِ ψ چنین است.

$$\nabla \cdot \nabla \psi = J, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{V}. \tag{1}$$

مرز ِ $\mathbb{X}$ را با $\mathrm{bo}(\mathbb{X})$، و تابع ِ گرین [2] متناظر با معادله یِ (1) با شرط- ِ-مرزی یِ مخلوط را با G نشان میدهم:

$$(\nabla' \cdot \nabla' G)(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r}' \in \mathbb{V}. \tag{2}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0, \qquad \boldsymbol{r}'\in\mathbb{D}. \tag{3}$$

$$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla})'\,G](\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0, \qquad \boldsymbol{r}'\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{\nabla}'$ مشتق-گیری نسبت به $\boldsymbol{r}'$، و $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر مرز به سو یِ بیرون است. $\mathbb{D}$ و $\mathbb{N}$ دُ مجموعه یِ بی-اشتراک َند که اجتماع ِ شان $\mathsf{bo}(\mathbb{V})$ است:

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{N}=\varnothing. \tag{5}$$

$$\mathbb{D}\cup\mathbb{N}=\mathsf{bo}(\mathbb{V}). \tag{6}$$

که بر $\mathbb{D}$ خُد ِ ψ و بر $\mathbb{N}$ مشتق ِ عمود-بر-مرز ِ ψ معلوم است:

$$\psi(\boldsymbol{r})=f_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{D}. \tag{7}$$

$$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\psi](\boldsymbol{r})=f_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

([3] یک مرجع است.) جواب ِ معادله یِ (1) با شرط- ِ-مرزیها یِ (7) و (8) چنین میشود.

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V')\,[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,J(\boldsymbol{r}')+\oint_{\mathsf{bo}(\mathbb{V})}(\mathrm{d}\,S')\,[K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,f(\boldsymbol{r}'). \tag{9}$$

$$K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=[\Theta_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}')]\,[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla})'\,G](\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-[\Theta_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}')]\,G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{10}$$

$$f(\boldsymbol{r})=[\Theta_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r})]\,f_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r})+[\Theta_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r})]\,f_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}). \tag{11}$$

که $\Theta_{\mathbb{X}}$ چنین تعریف میشود.

$$\Theta_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}\notin\mathbb{X}\\ 1, & \boldsymbol{r}\in\mathbb{X}\end{cases}. \tag{12}$$

2 ستون

ستون (ِ باز) $\mathbb{V}$ یک مجموعه یِ باز است، برابر با حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ سطح ِ (تخت ِ) $\mathbb{S}$ در پاره-خط ِ $(0,h)$:

$$\mathbb{V}=\mathbb{S}\times(0,h). \tag{13}$$

قاعده یِ ستون با (مجموعه یِ بازِ) $\mathbb{S}$ همانریخت است، و ارتفاعِ ستون (مقدارِ مثبتِ) h است. محورِ z را با محورِ ستون موازی میگیرم. $\boldsymbol{r}$ (بردارِ مکان) چنین میشود.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{14}$$

که ρ بردار یِ دُ-بُعدی (عمود بر محورِ z) است. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp + \mathrm{D}^2. \tag{15}$$

که $\boldsymbol{\nabla}_\perp$ تصویرِ $\boldsymbol{\nabla}$ در راستا یِ عمود بر محورِ z، و D مشتق-گیری در راستا یِ محورِ z است. $\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp$ لَپلَسی یِ عرضی ست. $\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp$ و D^2 با هم، و در نتیجه با $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ جا-به-جا میشوند:

$$[\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp, \mathrm{D}^2] = 0. \tag{16}$$

$$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp] = 0. \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \mathrm{D}^2] = 0. \tag{18}$$

البته این عملگرها بر تابعها یی اثر میکنند که دامنه یِ شان ستون است و بر مرزِ ستون شرط-ِ-مرزی یِ خاص ی را برمیئاورَند. $\mathsf{bo}(\mathbb{V})$ (مرزِ ستون) چنین است.

$$\mathsf{bo}(\mathbb{V}) = [\mathsf{bo}_1(\mathbb{V})] \cup [\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})] \cup [\mathsf{bo}_3(\mathbb{V})]. \tag{19}$$

که،

$$[\mathsf{bo}_i(\mathbb{V})] \cup [\mathsf{bo}_j(\mathbb{V})] = \varnothing, \quad i \neq j. \tag{20}$$

$$\mathsf{bo}_1(\mathbb{V}) = [\mathsf{bo}(\mathbb{S})] \times (0, h). \tag{21}$$

$$\mathsf{bo}_2(\mathbb{V}) = \mathbb{S} \times \{0, h\}. \tag{22}$$

$$\mathsf{bo}_3(\mathbb{V}) = \mathsf{bo}[\mathsf{bo}_1(\mathbb{V})]. \tag{23}$$

$$\mathsf{bo}_3(\mathbb{V}) = \mathsf{bo}[\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})]. \tag{24}$$

$\mathsf{bo}_1(\mathbb{V})$ سطحِ جانبی ست، و $\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})$ قاعدِها ست. $\mathsf{bo}_3(\mathbb{V})$ مرزِ سطح-ِ-جانبی ست، که البته هم ان مرزِ قاعدِها ست. بُعدِ $\mathsf{bo}_3(\mathbb{V})$ یک ی کمتر از بُعدِ $\mathsf{bo}(\mathbb{V})$ است. به هم ین خاطر،

$$\int_{\mathsf{bo}(\mathbb{V})}(\mathrm{d}\,S)\,\mathfrak{X}(\boldsymbol{r})=\int_{\mathsf{bo}_1(\mathbb{V})}(\mathrm{d}\,S)\,\mathfrak{X}(\boldsymbol{r})+\int_{\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})}(\mathrm{d}\,S)\,\mathfrak{X}(\boldsymbol{r}). \qquad (25)$$

عملَن $\mathsf{bo}_3(\mathbb{V})$ مهم نیست. $\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})$ را هم به این شکل مینویسم.

$$\mathsf{bo}_2(\mathbb{V})=\mathbb{S}_0\cup\mathbb{S}_h. \qquad (26)$$

که،

$$\mathbb{S}_s=\mathbb{S}\times\{s\}. \qquad (27)$$

این که جا-به-جاگرِ هر دُ-تا از $\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp$ و D^2 و $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ صفر است درست است؛ اگر شرط-ِ-مرزی برا یِ $\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp$ (بر سطحِ جانبی) مستقل از z باشد، و شرط-ِ-مرزی برا یِ D^2 (بر قاعدِها) مستقل از $\boldsymbol{\rho}$ باشد. اینها یعنی $\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp$ با در-نظر-گرفتنِ شرط-ِ-مرزی هم مستقل از z است: بر $\mathbb{S}$ تعریف شده. و D^2 با در-نظر-گرفتنِ شرط-ِ-مرزی هم مستقل از $\boldsymbol{\rho}$ است: بر $(0,h)$ تعریف شده. فرض میکنم چنین است. رابطه یِ (15) هم، درواقع به این شکل است.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}=(\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)\times\mathbf{1}_{(0,h)}+\mathbf{1}_{\mathbb{S}}\times\mathrm{D}^2. \qquad (28)$$

اما برا یِ سادِگی هم ان شکلِ (15) را به کار میبَرم.

3 تابع-ِ-گرین برا یِ ستون

تابع-ِ-گرین [2] برا یِ ستون را بر حسبِ ویژه-بردارها یِ $(\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)$ بسط میدهم:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_\lambda[G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')]\,Z_\lambda(z,z'). \qquad (29)$$

که،

$$(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}'_\perp\,G_\lambda)(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\lambda\,G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'),\quad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{S}. \tag{30}$$

$$G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{D}_1. \tag{31}$$

$$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)'\,G_\lambda](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{N}_1. \tag{32}$$

$\mathbb{D}_1$ و $\mathbb{N}_1$ دُ مجموعه یِ بی-اشتراک َند که اجتماع ِ شان $\mathsf{bo}(\mathbb{S})$ است:

$$\mathbb{D}_1\cap\mathbb{N}_1=\varnothing. \tag{33}$$

$$\mathbb{D}_1\cup\mathbb{N}_1=\mathsf{bo}(\mathbb{S}). \tag{34}$$

که،

$$G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{D}_1. \tag{35}$$

$$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)'\,G_\lambda](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{N}_1. \tag{36}$$

علامت ِ λ را بررسی میکنم. از (30) نتیجه میشود

$$\lambda\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,|G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')|^2=\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,[G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')]^\star\,(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}'_\perp\,G_\lambda)(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'). \tag{37}$$

که $\mathfrak{X}^\star$ مزدوج- ِ-مختلط ِ $\mathfrak{X}$ است. با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ،

$$\lambda\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,|G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')|^2=\oint_{\mathsf{bo}(\mathbb{S})}(\mathrm{d}\,\ell')\,[G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')]^\star\,[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)'\,G_\lambda](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\\ -\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,|(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\,G_\lambda)(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')|^2. \tag{38}$$

از (31) و (32) و (34) نتیجه میشود

$$[(G_\lambda)^\star\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)'\,G_\lambda](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\quad \boldsymbol{\rho}'\in[\mathsf{bo}(\mathbb{S})]. \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$\lambda\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,|G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')|^2=-\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,|(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\,G_\lambda)(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')|^2. \tag{40}$$

این یعنی λ حقیقی و نامثبت است. λ ممکن است صفر باشد، فقط اگر $(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\, G_\lambda)$ همه-جا صفر باشد، که یعنی $G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ مستقل از $\boldsymbol{\rho}'$ باشد. اگر $G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ مستقل از $\boldsymbol{\rho}'$ باشد و $\mathbb{D}_1$ ناتهی باشد (دقیقتر این که بُعدِ $\mathbb{D}_1$ با بُعدِ $\mathbb{S}$ برابر باشد)، آن گاه از (31) نتیجه میشود G_λ صفر است. پس λ منفی ست، مگر $\mathbb{D}_1$ تهی باشد، که یعنی $\mathbb{N}_1$ هم ان $\mathbb{S}$ باشد. از این پس فرض میکنم $\mathbb{D}_1$ ناتهی نیست (دقیقتر این که بُعدِ $\mathbb{D}_1$ با بُعدِ $\mathbb{S}$ برابر است). پس λ منفی ست.

میشود بستِگی یِ $G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ به ρ را چنان گرفت که

$$\sum_\lambda G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'),\quad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{S}. \tag{41}$$

چنین میکنم، و $G_\mathbb{S}$ را چنین تعریف میکنم.

$$G_\mathbb{S}=\sum_\lambda\frac{G_\lambda}{\lambda}. \tag{42}$$

دیده میشود $G_\mathbb{S}$ تابع- ِ-گرین [2] ِ متناظر با $\mathbb{S}$ است:

$$(\boldsymbol{\nabla}'_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}'_\perp\, G_\mathbb{S})(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'),\quad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{S}. \tag{43}$$

$$G_\mathbb{S}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{D}_1. \tag{44}$$

$$[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp)'\, G_\mathbb{S}](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0,\qquad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{N}_1. \tag{45}$$

معادله یِ (2) برا یِ G به این مینجامد.

$$\sum_\lambda[G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')]\,[(\mathrm{D}'^2+\lambda)\,Z_\lambda](z,z')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{r}'\in\mathbb{V}. \tag{46}$$

همچنین،

$$[\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')]\,\delta(z-z')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{47}$$

که، با استفاده از (41)، میشود

$$\sum_\lambda[G_\lambda(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')]\,\delta(z-z')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{\rho}'\in\mathbb{S}. \tag{48}$$

از (46) و (48) نتیجه میشود

$$[(\mathrm{D}'^2+\lambda)\,Z_\lambda](z,z')=\delta(z-z'),\quad z'\in(0,h). \tag{49}$$

شرایطِ- ِ-مرزی در قاعدهِا هم چنین میشوند.

$$(N'_{z'}\,Z_\lambda)(z,z')=0,\qquad\qquad z'\in\{0,h\}. \tag{50}$$

که،

$$N_s=\begin{cases}\mathbf{1}, & \mathbb{S}_s\subseteq\mathbb{D}\\ \\ \mathrm{D}, & \mathbb{S}_s\subseteq\mathbb{N}\end{cases}. \tag{51}$$

و $\mathbf{1}$ همانی ست.

λ منفی ست. پس

$$\lambda=-\nu^2. \tag{52}$$

که ν حقیقی (و مثبت) است. جوابِ معادله یِ (49) با شرط- ِ-مرزی یِ (50) چنین میشود.

$$Z_\lambda(z,z')=\frac{[\Upsilon_{\lambda\,0}(z_<)]\,[\Upsilon_{\lambda\,h}(z_>)]}{W_\lambda}. \tag{53}$$

که،

$$W_\lambda=\Upsilon_{\lambda\,0}\,\Upsilon'_{\lambda\,h}-\Upsilon'_{\lambda\,h}\,\Upsilon'_{\lambda\,0}. \tag{54}$$

$$\Upsilon_{\lambda\,s}(z)=\begin{cases}\sigma_s\,\sinh[\nu\,(z-s)], & \mathbb{S}_s\subseteq\mathbb{D}\\ \\ \cosh[\nu\,(z-s)], & \mathbb{S}_s\subseteq\mathbb{N}\end{cases}. \tag{55}$$

$$\sigma_s=\begin{cases}1, & s=0\\ \\ -1, & s=h\end{cases}. \tag{56}$$

به این ترتیب،

$$W_\lambda = -\nu \begin{cases} \sinh(\nu\, h) \\ \\ \cosh(\nu\, h) \end{cases} \tag{57}$$

sinh وقت ی ست که شرط- ِ-مرزی در دُ-قاعده یکسان است: یا بر هر-دُ خُد ِ G صفر است، یا بر هر-دُ مشتق ِ عمودی یِ G صفر است. cosh وقت ی ست که بر یک قاعده خُد ِ G و بر یک قاعده مشتق ِ عمودی یِ G صفر است.

4 جواب ِ معادله برا یِ ستون

جواب ِ معادله یِ (1) با شرط- ِ-مرزیها یِ (7) و (8) به شکل ِ (9) است. این جواب، برا یِ ستون چنین میشود.

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{r}) = {} & \int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\, S')\, \int_0^h (\mathrm{d}\, z')\, [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, J(\boldsymbol{r}') \\ & + \oint_{\mathsf{bo}(\mathbb{S})} (\mathrm{d}\, \ell')\, \int_0^h (\mathrm{d}\, z')\, [K_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, f_1(\boldsymbol{r}') \\ & + \int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\, S')\, \{[K_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, f_0(\boldsymbol{r}') + [K_h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, f_h(\boldsymbol{r}')\}. \end{aligned} \tag{58}$$

شاخصها یِ 1 و 0 و h، به ترتیب، متناظر با سطح ِ جانبی، S_0، و S_h اَند.

خُد ِ G از رابطه یِ (29) به دست میئاید. برا یِ $K_\mathfrak{a}$ ها هم ین رابطه، و البته (10) را به کار میبَرَم:

$$\begin{aligned} K_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = {} & \sum_\lambda \{[\Theta_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}')]\, [(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp)'\, G_\lambda](\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \\ & - [\Theta_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}')]\, G_\lambda(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\}\, Z_\lambda(z, z'). \end{aligned} \tag{59}$$

$$K_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\sum_\lambda [G_\lambda(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')]\, [\nu\, \Theta_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}') + \Theta_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}')]\, \frac{\Upsilon_{\lambda\, h}(z)}{W_\lambda}. \tag{60}$$

$$K_h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\sum_\lambda [G_\lambda(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')]\, [\nu\, \Theta_{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}') + \Theta_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{r}')]\, \frac{\Upsilon_{\lambda\, 0}(z)}{W_\lambda}. \tag{61}$$

5 پانوشتها

[1] Poisson

[2] Green

[3] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 1