X1-166 (2022/08/24)

سنجشِ احتمال، با جمعیتِ محدود

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تخمینِ احتمال و عدم-ِقطعیتِ آن، وقت ی جمعیت محدود است، بررسی میشود.

0 درامد

وقت ی جمعیت ی که آزمایش بر آن انجام میشود محدود است، تعدادِ آزمایشها را نمیشود نامحدود زیاد کرد. البته اگر تعدادِ آزمایشها به جمعیت نزدیک شود، قطعیتِ سنجش زیاد میشود: تصادفی-بودنِ نتیجه به صفر میگراید. مسئله این است که از یک جمعیتِ N تایی، M تا شاخص َند (یک ویژگی دارند). تصادفی n نمونه آزمایش میشود و m تا از نمونِها یِ آزمایش-شده شاخص َند. N و n و m معلوم َند. M چند است؟

رُشن است که اگر n هم ان N باشد، M هم هم ان m است؛ و نتیجه قطعی ست. اما معمولَن n کمتر از N است و برا یِ M نَ یک مقدارِ قطعی، بل که یک تُزیع به دست میئاید. البته انتظار میرود هر چه n بزرگتر شود این تُزیع قطیتر (تیزتر) شود. هدف محاسبه یِ این تُزیع و میانگین و وردایی یِ متناظر است. این در ادامه یِ [1] است، که حالتِ حدی یِ N به-بینهایت است.

اساسِ کار، مثلِ هم ان که در [1] به کار رفت، قضیه یِ بِیز [2] است. احتمالِ رخ-دادنِ $\mathbb{A}$

را با $P(\mathbb{A})$، و احتمالِ رخ-دادنِ $\mathbb{B}$ به شرطِ $\mathbb{A}$ را با $P(\mathbb{B}|\mathbb{A})$ نشان میدهم. گیرم مجموعِها یِ $\mathbb{E}_i$ چنان َند که

$$\mathbb{E}_i \cap \mathbb{E}_j = \varnothing, \qquad i \neq j. \tag{1}$$

$$\bigcup_i \mathbb{E}_i = \mathbb{M}, \tag{2}$$

که $\mathbb{M}$ مجموعه یِ مرجع است (که احتمال َش یک است). چنان که در [1]، یا مثلَن فصلِ 4 از [3] آمده،

$$P(\mathbb{E}_i|\mathbb{A}) = \frac{P(\mathbb{A}|\mathbb{E}_i)\,P(\mathbb{E}_i)}{\sum_j P(\mathbb{A}|\mathbb{E}_j)\,P(\mathbb{E}_j)}. \tag{3}$$

هدف این است که برا یِ تعدادِ آنها یی (در جمعیتِ N تایی) که شاخص َند تُزیع-ِ-احتمال به دست آید. تعدادِ آنها یی که شاخص َند یک متغیرِ تصادفی ست که آن را با $\mathfrak{M}$ نشان میدهم. تعدادِ آنها یی که بینِ n-نمونه یِ آزمایش-شده شاخص َند هم یک متغیرِ تصادفی ست، که آن را با $\mathfrak{m}$ نشان میدهم. رابطه یِ (3) چنین میشود.

$$P(\mathfrak{M}=M|\mathfrak{m}=m) = \frac{P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=M)\,P(\mathfrak{M}=M)}{\sum_J P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=J)\,P(\mathfrak{M}=J)}. \tag{4}$$

1 احتمال، بر اساسِ آزمایش

از یک جمعیتِ N تایی، که M تا یِ شان شاخص َند، n نمونه سنجیده شده. احتمالِ این که m تا از نمونِها یِ آزمایش-شده شاخص باشند، از تُزیعِ فُق-ِ-هندسی به دست میئاید. تُزیعِ فُق-ِ-هندسی را با P_{hg} نشان میدهم:

$$P_{\mathrm{hg}}(m;N,M,n) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}. \tag{5}$$

مجموع ِ $P_{\rm hg}(m;N,M,n)$ بر m یک است، چنان که باید. یک راه ِ اثبات این است. تابع ِ $\mathfrak{A}$ را چنین تعریف میکنم:

$$\mathfrak{A}(x)=\sum_{j,k}\binom{J}{j}\binom{K}{k}x^{j+k}. \tag{6}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(x)&=\left[\sum_{j}\binom{J}{j}x^{j}\right]\left[\sum_{k}\binom{K}{k}x^{k}\right],\\&=(1+x)^{J}\,(1+x)^{K}.\end{aligned} \tag{7}$$

یعنی،

$$\mathfrak{A}(x)=(1+x)^{J+K}. \tag{8}$$

البته،

$$\mathfrak{A}(x)=\sum_{l}\mathfrak{A}_l\,x^{l}. \tag{9}$$

که،

$$\mathfrak{A}_l=\binom{J+K}{l}. \tag{10}$$

همچنین،

$$\mathfrak{A}_l=\sum_{j}\binom{J}{j}\binom{K}{l-j}. \tag{11}$$

پس،

$$\sum_{j}\binom{J}{j}\binom{K}{l-j}=\binom{J+K}{l}. \tag{12}$$

از جمله،

$$\sum_{m}\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}=\binom{N}{n}. \tag{13}$$

که نشان میدهد

$$\sum_m P_{\rm hg}(m; N, M, n) = 1. \qquad (14)$$

دیده میشود

$$P(\mathfrak{m} = m|\mathfrak{M} = M) = P_{\rm hg}(m; N, M, n). \qquad (15)$$

و البته،

$$\sum_m P(\mathfrak{m} = m|\mathfrak{M} = M) = 1. \qquad (16)$$

چنان که باید.

با احتمال ِ $P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m)$ میشود میانگین ِ $f(\mathfrak{M})$ را حساب کرد:

$$\langle f(\mathfrak{M})\rangle = \sum_M [P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m)]\, f(M). \qquad (17)$$

که $\langle f(\mathfrak{M})\rangle$ میانگین ِ $f(\mathfrak{M})$ است (به شرط ی که m تا از n نمونه ی ِ سنجیده-شده شاخص باشند). از جمله،

$$\langle\mathfrak{M}\rangle = \sum_M [P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m)]\, M. \qquad (18)$$

$$\mathsf{Var}(\mathfrak{M}) = \sum_M [P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m)]\, (M - \langle\mathfrak{M}\rangle)^2. \qquad (19)$$

که $\mathsf{Var}(\mathfrak{M})$ وردایی ی ِ $\mathfrak{M}$ است.

اما برا ی ِ به-دست-آوردن ِ $P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m)$ باید $P(\mathfrak{M} = M)$ معلوم باشد، یعنی باید احتمال ِ پیش-از-انجام- ِ-آزمایش معلوم باشد.

2 سنجش ِ احتمال، بدون ِ پیش-فرض

پیش-فرض ی نباشد را این میگیرم که $P(\mathfrak{M}=J)$ مستقل از J است (البته برا یِ J ها یِ صحیح ِ نامنفی که از N بزرگتر نیستند):

$$P(\mathfrak{M}=J)=\frac{1}{N+1},\quad 0\le J\le N. \tag{20}$$

به این ترتیب،

$$P(\mathfrak{M}=M|\mathfrak{m}=m)=\frac{P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=M)}{\displaystyle\sum_J P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=J)}. \tag{21}$$

که نتیجه میدهد

$$P(\mathfrak{M}=M|\mathfrak{m}=m)=\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\displaystyle\sum_J\binom{J}{m}\binom{N-J}{n-m}}. \tag{22}$$

رُشن است که مجموع ِ $P(\mathfrak{M}=M|\mathfrak{m}=m)$ بر M یک است. برا یِ محاسبه یِ مخرج ِ طرف ِ راست ِ (22) هم تابع ِ $\mathfrak{B}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{B}(x)=\sum_{J,K}\binom{J}{j}\binom{K}{k}x^{J+K-j-k}. \tag{23}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(x)&=\left[\sum_J\binom{J}{j}x^{J-j}\right]\left[\sum_K\binom{K}{k}x^{K-k}\right],\\&=(1-x)^{-j-1}(1-x)^{-k-1}.\end{aligned} \tag{24}$$

یعنی،

$$\mathfrak{B}(x)=(1-x)^{-j-k-2}. \tag{25}$$

البته،

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_l \mathfrak{B}_l\, x^l. \tag{26}$$

که،

$$\mathfrak{B}_l = \binom{j+k+l+1}{j+k+1}. \tag{27}$$

همچنین،

$$\mathfrak{B}_l = \sum_J \binom{J}{j}\binom{j+k+l-J}{k}. \tag{28}$$

پس،

$$\sum_J \binom{J}{j}\binom{j+k+l-J}{k} = \binom{j+k+l+1}{j+k+1}. \tag{29}$$

از جمله،

$$\sum_J \binom{J}{m}\binom{N-J}{n-m} = \binom{N+1}{n+1}. \tag{30}$$

که نشان میدهد

$$P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}. \tag{31}$$

این را چنین مینویسم.

$$P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m) = \frac{1}{Z}\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}. \tag{32}$$

که،

$$Z = \binom{N+1}{n+1}. \tag{33}$$

متغیر ِ تصادفی ی ِ $\mathfrak{X}_N$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{X}_N = \frac{\mathfrak{M}}{N}. \tag{34}$$

$\mathfrak{X}_\infty$ را با خُد ِ $\mathfrak{X}$ نشان میدهم. برا ی ِ $\mathfrak{X}$ چگالی-ی ِ-احتمال تعریف میشود، که آن را با ρ نشان میدهم:

$$\rho(\mathfrak{X} = x) = \lim_{N\to\infty}[N\, P(\mathfrak{M} = N\, x)]. \tag{35}$$

ضریب ِ P در طرف ِ راست، هم ان $(\Delta\, x)^{-1}$ است. برا ی ِ چگالی-ی ِ-احتمال ِ شرطی هم،

$$\rho(\mathfrak{X} = x|\mathfrak{m} = m) = \lim_{N\to\infty}[N\, P(\mathfrak{M} = N\, x|\mathfrak{m} = m)]. \tag{36}$$

وقت ی J بزرگ است و j بزرگ نیست،

$$\binom{J}{j} \sim \frac{J^j}{j!}. \tag{37}$$

به این ترتیب، وقت ی N و M بزرگ َند و m و n بزرگ نیستند،

$$P(\mathfrak{M} = M|\mathfrak{m} = m) \sim \frac{(n+1)!}{(N+1)^{n+1}}\,\frac{M^m}{m!}\,\frac{(N-M)^{n-m}}{(n-m)!}. \tag{38}$$

که نتیجه میدهد

$$\rho(\mathfrak{X} = x|\mathfrak{m} = m) = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\, x^m\, (1-x)^{n-m}. \tag{39}$$

این هم ان است که در [1] به دست آمده است.

3 گشتاورها

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\langle(\mathfrak{M}+1)\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_M \binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}(M+1),\\
&= \frac{m+1}{Z}\sum_M \binom{M+1}{m+1}\binom{N-M}{n-m},\\
&= \frac{m+1}{Z}\binom{N+2}{n+2}.
\end{aligned} \tag{40}$$

یعنی،

$$\langle(\mathfrak{M}+1)\rangle = \frac{m+1}{n+2}\,(N+2). \tag{41}$$

به هم ین ترتیب،

$$\begin{aligned}\langle(\mathfrak{M}+1)\,(\mathfrak{M}+2)\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{M}\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}(M+1)\,(M+2),\\ &= \frac{(m+1)\,(m+2)}{Z}\sum_{M}\binom{M+2}{m+2}\binom{N-M}{n-m},\\ &= \frac{(m+1)\,(m+2)}{Z}\binom{N+3}{n+3}.\end{aligned} \tag{42}$$

یعنی،

$$\langle(\mathfrak{M}+1)\,(\mathfrak{M}+2)\rangle = \frac{(m+1)\,(m+2)}{(n+2)\,(n+3)}\,(N+2)\,(N+3). \tag{43}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\mathfrak{M}) &= \mathsf{Var}(\mathfrak{M}+1),\\ &= \langle(\mathfrak{M}+1)^2\rangle - [\langle(\mathfrak{M}+1)\rangle]^2,\\ &= \langle(\mathfrak{M}+1)\,(\mathfrak{M}+2)\rangle - \langle(\mathfrak{M}+1)\rangle - [\langle(\mathfrak{M}+1)\rangle]^2.\end{aligned} \tag{44}$$

پس،

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\mathfrak{M}) = \frac{(m+1)\,(m+2)}{(n+2)\,(n+3)}\,&(N+2)\,(N+3)\\ &- \frac{m+1}{n+2}\,(N+2) - \left[\frac{m+1}{n+2}\,(N+2)\right]^2.\end{aligned} \tag{45}$$

از تعریفِ $\mathfrak{X}$ دیده میشود

$$\langle\mathfrak{f}(\mathfrak{X})\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle\mathfrak{f}\left(\frac{\mathfrak{M}}{N}\right)\right\rangle. \tag{46}$$

از جمله،

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{X} \rangle &= \lim_{N\to\infty} \frac{\langle \mathfrak{M} \rangle}{N}, \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{N} \left[\frac{m+1}{n+2} (N+2) - 1 \right] \right\}, . \end{aligned} \tag{47}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle \mathfrak{X} \rangle = \frac{m+1}{n+2}. \tag{48}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\mathfrak{X}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{Var}(\mathfrak{M})}{N^2}, \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{(m+1)(m+2)}{(n+2)(n+3)} \frac{(N+2)(N+3)}{N^2} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{m+1}{n+2} \frac{N+2}{N^2} - \left(\frac{m+1}{n+2} \frac{N+2}{N^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{49}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{Var}(\mathfrak{X}) = \frac{(m+1)(m+2)}{(n+2)(n+3)} - \left(\frac{m+1}{n+2} \right)^2. \tag{50}$$

یعنی،

$$\mathsf{Var}(\mathfrak{X}) = \frac{(m+1)(n-m+1)}{(n+2)^2 (n+3)}. \tag{51}$$

روابط ِ (48) و (51) هم انها یَند که در [1] به دست آمده اند.

4 سنجش ِ احتمال، با پیش-فرض

مثل ِ [1]، پیش-فرض را چنین وارد میکنم که قبلَن ν نمونه سنجیده شده، که μ تا از آنها شاخص بوده اند. این یعنی جمعیت ِ اولیه $(N+\nu)$ بوده. و این که در جعیت ِ N تایی یِ پس از سنجش ِ اولیه

M تا شاخص باشند، همئرز با این است که در جمعیت ِ $(N+\nu)$ تایی یِ اولیه $(M+\mu)$ تا شاخص بوده اند. اینها یعنی $P(\mathfrak{M}=M)$ در رابطه یِ (4) چنین است.

$$P(\mathfrak{M}=M)=\frac{\binom{M+\mu}{\mu}\binom{N+\nu-M-\mu}{\nu-\mu}}{\binom{N+\nu+1}{n+\nu+1}}. \tag{52}$$

از این نتیجه میشود

$$P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=M)\,P(\mathfrak{M}=M)=\mathcal{C}\binom{M+\mu}{m+\mu}\binom{N+\nu-M-\mu}{n+\nu-m-\mu}. \tag{53}$$

که $\mathcal{C}$ مستقل از M است. به این ترتیب، با استفاده از (30)،

$$\sum_J P(\mathfrak{m}=m|\mathfrak{M}=J)\,P(\mathfrak{M}=J)=\mathcal{C}\binom{N+\nu+1}{n+\nu+1}. \tag{54}$$

که نتیجه میدهد

$$P(\mathfrak{M}=M|\mathfrak{m}=m)=\frac{\binom{M+\mu}{m+\mu}\binom{N+\nu-M-\mu}{n+\nu-m-\mu}}{\binom{N+\nu+1}{n+\nu+1}}. \tag{55}$$

این هم ان (31) است؛ که در آن μ به M و m اضافه شده، و ν به N و n اضافه شده.

با هم ین تبدیل، گشتاورها هم از رو یِ گشتاورها یِ حالت ِ بدون- ِپیش-فرض به دست میائیند:

$$\langle(\mathfrak{M}+\mu+1)\rangle=\frac{m+\mu+1}{n+\nu+2}\,(N+\nu+2). \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\langle(\mathfrak{M}+\mu+1)\,(\mathfrak{M}+\mu+2)\rangle=&\frac{(m+\mu+1)\,(m+\mu+2)}{(n+\nu+2)\,(n+\nu+3)}\\ &\times(N+\nu+2)\,(N+\nu+3).\end{aligned} \tag{57}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\mathfrak{M})=&\frac{(m+\mu+1)\,(m+\mu+2)}{(n+\nu+2)\,(n+\nu+3)}\,(N+\nu+2)\,(N+\nu+3)\\ &-\frac{m+\mu+1}{n+\nu+2}\,(N+\nu+2)-\left[\frac{m+\mu+1}{n+\nu+2}\,(N+\nu+2)\right]^2.\end{aligned} \tag{58}$$

حالت ی که N و M بزرگ باشند هم، به شرط ی که ν و μ بزرگ نباشند، مثل ِ حالت ِ بدون- ِ- پیش-فرض به دست میئاید؛ که در آن μ به m اضافه شده، و ν به n اضافه شده:

$$\rho(\mathfrak{X} = x|\mathfrak{m} = m) = \frac{(n+\nu+1)!}{(m+\mu)!\,(n+\nu-m-\mu)!}\,x^{m+\mu}\,(1-x)^{n+\nu-m-\mu}. \quad (59)$$

و برا یِ گشتاورها،

$$\langle\mathfrak{X}\rangle = \frac{m+\mu+1}{n+\nu+2}. \quad (60)$$

$$\mathsf{Var}(\mathfrak{X}) = \frac{(m+\mu+1)\,(n+\nu-m-\mu+1)}{(n+\nu+2)^2\,(n+\nu+3)}. \quad (61)$$

روابط ِ (58) تا (60) هم انها یَند که در [1] به دست آمده اند.

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «سنجش ِ احتمال» X1-089 (2013/01/28)

[2] Bayes

[3] Morris H. deGroot & Mark J. Schervish; “probability and statistics” 4th edition (Addison-Wesley, 2002)