X1-169 (2023/01/26)

میدان ِ مغناطیسی و نیرو برا یِ یک استوانه یِ دایرِئی یَ ِ حامل ِ جریان

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

از یک استوانه یِ دایرِئی جریان ی سمتی-متقارن و مستقل-از-زمان میگذرد. میدان ِ مغناطیسی و نیرو (یا فشار) محاسبه میشوند.

0 درامد

مختصات ِ استوانِئی (ρ, ϕ, z) اند. بردار ِ مکان را با $\boldsymbol{r}$ نشان میدهم. از یک استوانه یِ دایرِئی یِ بلند به شعاع ِ a جریان ی سمتی-متقارن و مستقل-از-زمان میگذرد. محور ِ z را محور ِ استوانه میگیرم. جریان ِ سطحی $(\boldsymbol{J}_\mathrm{s})$ چنین است.

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, J_{\mathrm{s}\,\phi} + \hat{\boldsymbol{z}}\, J_{\mathrm{s}\,z}. \tag{1}$$

که $J_{\mathrm{s}\,\phi}$ و $J_{\mathrm{s}\,z}$ ثابت َند. میدان ِ مغناطیسی $(\boldsymbol{B})$ چنین میشود.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, B_\phi + \hat{\boldsymbol{z}}\, B_z. \tag{2}$$

که B_ϕ و B_z تابع ِ فقط ρ اند و

$$B_\phi = \frac{\mu_0 \, J_{\mathrm{s}\,z} \, a}{\rho} \, \Theta(\rho - a). \tag{3}$$

$$B_z = \mu_0 \, J_{\mathrm{s}\,\phi} \, \Theta(a - \rho). \tag{4}$$

μ_0 تراوایی یِ مغناطیسی (در خلئ) است. Θ تابع ِ هِویسایِد [1] است:

$$\Theta(\mathfrak{x}) = 0, \quad \mathfrak{x} < 0. \tag{5}$$

$$\Theta(\mathfrak{x}) = 1, \quad \mathfrak{x} > 0. \tag{6}$$

1 نیرو و انرژی

نیرو یِ (تعمیم-یافته یِ) متناظر با مختصه یِ ξ را با F_ξ نشان میدهم. F_ξ ضریب ِ $(\mathrm{d}\,\xi)$ در رابطه یِ کار (W) با تغییر ِ ξ است:

$$\mathrm{d}\,W = F_\xi \, \mathrm{d}\,\xi. \tag{7}$$

چنان که در مثلَن [2] آمده (نَ با دقیقَن هم ین نمادها)، این نیرو را میشود با استفاده از انرژی یِ پتانسیل حساب کرد:

$$-F_\xi = \left(\frac{\partial\, U}{\partial\, \xi}\right)_X. \tag{8}$$
$$F_\xi = \left(\frac{\partial\, U}{\partial\, \xi}\right)_Y. \tag{9}$$

U انرژی یِ پتانسیل است و شاخص ِ $\mathfrak{Z}$ به معنی یِ این است که مشتق-گیری در $\mathfrak{Z}$ ِ ثابت انجام شده. X پاسخ، و Y رانش است. برا یِ سیستمها یِ مغناطیسی،

$$X = \Phi. \tag{10}$$

$$Y = I. \tag{11}$$

که Φ شارِ مغناطیسی ست و I جریان است. به این ترتیب، برا یِ سیستمها یِ مغناطیسی،

$$-F_\xi = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_\Phi. \tag{12}$$

$$F_\xi = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_I. \tag{13}$$

2 انرژی

انرژی یِ پتانسیل (به خاطرِ میدانِ مغناطیسی) چنین است.

$$U = \int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}{2\,\mu_0}. \tag{14}$$

انتگرال-گیری بر کلِ فضا ست. برا یِ یک استوانه یِ بلند، این انتگرال به دُ خاطر بینهایت میشود: به خاطرِ این که ρ تا بینهایت میرود، و به خاطرِ این که z تا بینهایت میرود. از (3) (همراه با شکلِ عنصر-ِ-حجم در مختصاتِ استوانِئی) دیده میشود انتگرال-ده در ρ ها یِ بزرگ مثلِ ρ^{-1} رفتار میکند. پس وقت ی حدِ بالا یِ انتگرال بر ρ به بینهایت میگراید، انتگرال لگاریتمی به بینهایت میگراید. از (3) و (4) هم دیده میشود انتگرال-ده مستقل از z است. پس وقت ی حدها یِ پایین و بالا یِ انتگرال بر z به منفی-یِ-بینهایت و بینهایت میگرایند، انتگرال خطی به بینهایت میگراید.

البته ارتفاعِ استوانه یِ واقعی بینهایت نیست و نتیجه انرژی یِ پتانسیل واقعَن بینهایت نمیشود. اما محاسبه یِ انرژی-یِ-پتانسیلِ واقعی ساده نیست. یک راه این است که انرژی-یِ-پتانسیل با هم ان میدانها یِ (3) و (4)، ولی با ارتفاع-ِ-استوانه یِ محدود (h) و با یک حد-ِ-بالا یِ محدودِ R برا یِ ρ حساب شود. این انرژی-یِ-پتانسیل را با U_0 نشان میدهم:

$$U = U_0 + \tilde{U}. \tag{15}$$

$\tilde{U}$ خطا یِ حاصل از تقریب-کردنِ U با U_0 است. برا یِ محاسبه یِ نیرو، خُدِ انرژی-یِ-پتانسیل لازم نیست. تغییرِ آن لازم است:

$$\delta\,U = \delta\,U_0 + \delta\,\tilde{U}. \tag{16}$$

همچنین،

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\delta\,\tilde U}{h}=0. \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\delta\,U}{h}=\lim_{h\to\infty}\frac{\delta\,U_0}{h}. \tag{18}$$

پس برا ی ِ محاسبه ی ِ نیرو-بر-طول، وقت ی ارتفاع به بینهایت میگراید، میشود U_0 را به جا ی ِ U به کار برد.

محاسبه ی ِ U_0 خیل ی سادتر از محاسبه ی ِ U است:

$$U_0=(2\,\pi)\,\frac{\mu_0}{2}\,\int_0^h(\mathrm{d}\,z)\,\left[\int_0^a(\rho\,\mathrm{d}\,\rho)\,J_{\mathrm{s}\,\phi}^2+\int_a^R(\rho\,\mathrm{d}\,\rho)\,J_{\mathrm{s}\,z}^2\,\frac{a^2}{\rho^2}\right]. \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$U_0=\pi\,\mu_0\,h\,a^2\,\left(\frac{J_{\mathrm{s}\,\phi}^2}{2}+J_{\mathrm{s}\,z}^2\,\ln\frac{R}{a}\right). \tag{20}$$

3 نیرو

با استفاده از (18) روابط ِ (12) و (13) چنین میشوند.

$$-F_\xi=\left(\frac{\partial\,U_0}{\partial\,\xi}\right)_\Phi. \tag{21}$$

$$F_\xi=\left(\frac{\partial\,U_0}{\partial\,\xi}\right)_I. \tag{22}$$

این که جریان ثابت بماند لزومَن هم ان نیست که مئلفِها ی ِ J_{s} ثابت بمانند. جریان ی که از یال ِ استوانه میگذرد را با I_ϕ، و جریان ی که از محیط ِ استوانه میگذرد را با I_z نشان میدهم. (اینها مئلفِها ی ِ بردار ِ جریان نیستند: جریان اسکالر است.) دیده میشود

$$I_\phi=h\,J_{\mathrm{s}\,\phi}. \tag{23}$$

$$I_z=2\,\pi\,a\,J_{\mathrm{s}\,z}. \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$U_0 = \mu_0 \left(\frac{\pi\, a^2\, I_\phi^2}{2\, h} + \frac{h\, I_z^2}{4\, \pi}\ \ln \frac{R}{a} \right). \tag{25}$$

حالتها یی را بررسی میکنم که ξ مختصه یِ شعاع- ِ-استوانِه یا مختصه یِ ارتفاع است.

3.1 نیرو یِ شعاعی

در این حالت

$$\xi = a. \tag{26}$$

و از (7) دیده میشود

$$F_a = 2\, \pi\, a\, h\, P. \tag{27}$$

که P فشار (ِ در سمت ِ افزایش ِ a) است. از رابطه یِ (22)، همراه با (25)، نتیجه میشود

$$F_a = \mu_0 \left(\frac{\pi\, a\, I_\phi^2}{h} - \frac{h\, I_z^2}{4\, \pi\, a} \right). \tag{28}$$

یا،

$$F_a = \mu_0\, \pi\, a\, h\, (J_{\mathrm{s}\,\phi}^2 - J_{\mathrm{s}\,z}^2). \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$P = \frac{\mu_0\, (J_{\mathrm{s}\,\phi}^2 - J_{\mathrm{s}\,z}^2)}{2}. \tag{30}$$

این را مستقیم هم میشد حساب کرد:

$$P = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot\, (\boldsymbol{J}_\mathrm{s} \times \tilde{\boldsymbol{B}}). \tag{31}$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح به سو یِ بیرون است:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{32}$$

و $\tilde{\boldsymbol{B}}$ میانگین ِ $\boldsymbol{B}$ در دُ-سو یِ سطح است. از (3) و (4) دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0\,(\hat{\boldsymbol{\phi}}\,J_{\mathrm{s}\,z} + \hat{\boldsymbol{z}}\,J_{\mathrm{s}\,\phi})}{2}. \tag{33}$$

روابط ِ (32) و (33) را در (31) میگذارم. رابطه یِ (30) نتیجه میشود.

3.2 نیرو یِ ارتفاعی

در این حالت

$$\xi = h. \tag{34}$$

و از (7) دیده میشود F_h هم ان F_z (مئلفه یِ نیرو در جهت ِ z) است:

$$F_h = F_z. \tag{35}$$

از رابطه یِ (22)، همراه با (25)، نتیجه میشود

$$F_h = \mu_0\,\left(-\frac{\pi\,a^2\,I_\phi^2}{2\,h^2} + \frac{I_z^2}{4\,\pi}\,\ln\frac{R}{a}\right). \tag{36}$$

یا،

$$F_h = \mu_0\,\pi\,a^2\,\left(-\frac{J_{\mathrm{s}\,\phi}^2}{2} + J_{\mathrm{s}\,z}^2\,\ln\frac{R}{a}\right). \tag{37}$$

به این ترتیب،

$$F_z = \mu_0\,\pi\,a^2\,\left(-\frac{J_{\mathrm{s}\,\phi}^2}{2} + J_{\mathrm{s}\,z}^2\,\ln\frac{R}{a}\right). \tag{38}$$

لابد این نیرو یی ست که به لبه ی ِ بالایی ی ِ استوانه (بخش ی از استوانه که به لبه ی ِ بالایی نزدیک است) وارد میشود. نیرو یی مشابه، با علامت ِ مخالف، هم به لبه ی ِ پایینی ی ِ استوانه (بخش ی از استوانه که به لبه ی ِ پایینی نزدیک است) وارد میشود.

اینجا یک مشکل پیش میائید: شعاع ِ کمکی ی ِ R فقط برا ی ِ این وارد شده بود که بینهایت-شدن ِ انرژی را منظم کند. اما در عبارت ی که برا ی ِ نیرو به دست آمده باقی مانده. علاوه بر این، مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان ِ سطحی هم در مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو وارد شده. این که مئلفه ی ِ سمتی ی ِ جریان ِ سطحی در مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو وارد شود عجیب نیست: نیرو باید بر جریان- ِ-سطحی عمود باشد. پس نیرو ی ِ حاصل از مئلفه ی ِ سمتی ی ِ جریان ِ سطحی میتواند مئلفه ی ِ شعاعی و ارتفاعی داشته باشد. البته مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو وقت ی ناصفر است که میدان ِ مغناطیسی مئلفه ی ِ شعاعی داشته باشد. میدان ِ مغناطیسی ی ِ حاصل از مئلفه ی ِ سمتی ی ِ جریان- ِ-سطحی، دور از لبه ی ِ استوانه مئلفه ی ِ شعاعی ندارد، اما نزدیک ِ لبه مئلفه ی ِ شعاعی دارد و مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو ی ِ حاصل از مئلفه ی ِ سمتی ی ِ جریان- ِ-سطحی از آنجا میائید. اما مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان- ِ-سمتی نمیتواند در مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو وارد شود: نیرو ی ِ حاصل از مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان- ِ-سمتی، بر ارتفاع عمود است.

این (که در مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو هم R و هم مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان وارد میشوند) نشان میدهد بخش ِ متناظر با مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان- ِ-سطحی در مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ نیرو نادرست است، دست- ِ-کم تُضیح میخاهد.

مشکل از اینجا آمده که مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان ِ سطحی، متناظر با یک چشمه ی ِ مستقل-از-زمان نیست: استوانه هر قدر هم که بلند باشد، لبه دارد و به خاطر ِ مئلفه ی ِ ارتفاعی ی ِ جریان ِ سمتی، در لبِها ی ِ آن بار جمع میشود:

$$\dot{\lambda}_{+} = J_{\mathrm{s}\,z}. \tag{39}$$

$$\dot{\lambda}_{-} = J_{\mathrm{s}\,z}. \tag{40}$$

λ_{+} چگالی ی ِ طولی ی ِ بار در لبه ی ِ بالایی، و λ_{-} چگالی ی ِ طولی ی ِ بار در لبه ی ِ پایینی ست؛ و $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به زمان است. به خاطر ِ این چشمه ی ِ وابسته-به-زمان، میدان ِ مغناطیسی از روابط ِ متناظر با میدانها ی ِ مستقل-از-زمان به دست نمیئاید. شرط ِ این که چشمه مستقل-از-زمان باشد، این است که جریان بسته شود: یعنی جریان در لبه تمام نشود بل که به لبه وارد و از لبه خارج شود.

یک راه برا یِ بستن ِ جریان این است. از استوانه یک چنبره ساخته میشود که محور ِ تقارن ِ آن محور ِ z است، و مقطع ِ آن با هر نیم-صفحه ای که یال َ ش محور ِ z است یک مستطیل است. یک ضلع ِ این مستطیل یال ِ استوانه است. یک ضلع ِ دیگر هم موازی با محور ِ z و به فاصله یِ R از آن است. حالا میشود جریان ی که با یال ِ استوانه موازی ست را رو یِ سطح ِ این چنبره بست: هر خط- ِ-جریان ِ متناظر با مئلفه یِ ارتفاعی یِ جریان- ِ-سمتی یِ استوانه، یک مستطیل است که مقطع ِ چنبره با نیم-صفحه ای ست که یال َ ش محور ِ z است. به این ترتیب، در سطحها یِ پایینی و بالایی یِ چنبره جریان ِ سطحی هست. البته در لبه یِ بیرونی یِ چنبره هم جریان ِ سطحی هست. جریان- ِ-سطحی یِ سطح ِ پایینی را با $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,-}$، جریان- ِ-سطحی یِ سطح ِ بالایی را با $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,+}$، و جریان در لبه یِ بیرونی یِ چنبره را با $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,R}$ نشان میدهم:

$$-\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,-}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{J_{\mathrm{s}\,z}\,a}{\rho}. \tag{41}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,+}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{J_{\mathrm{s}\,z}\,a}{\rho}. \tag{42}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}\,R}=-J_{\mathrm{s}\,z}\,\frac{a}{R}. \tag{43}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (3) چنین میشود.

$$B_\phi=\frac{\mu_0\,J_{\mathrm{s}\,z}\,a}{\rho}\,[\Theta(\rho-a)-\Theta(\rho-R)]. \tag{44}$$

رابطه ی (25)، و در نتیجه روابط ِ (30) و (38)، عوض نمیشوند. اما حالا معلوم است بخش ِ متناظر با $J_{\mathrm{s}\,z}$ در F_z از کجا آمده است: جریان ِ سطحی در سطحها یِ پایینی و بالایی یِ چنبره شعاعی یَند و در مئلفه یِ ارتفاعی یِ نیرو وارد میشوند. اینها در سطحها یِ پایینی و بالایی فشارها یِ، به ترتیب، P_- و P_+ را میسازند، که از روابط ی مشابه با (31) به دست میئایند:

$$-\hat{\boldsymbol{n}}_-=\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{45}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_+=\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{46}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_-=\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}\,B_\phi}{2}. \tag{47}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_+=\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}\,B_\phi}{2}. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$P_- = \frac{\mu_0\, J_{\mathrm{s}\,z}^2\, a^2}{2\,\rho^2}. \tag{49}$$

$$P_+ = \frac{\mu_0\, J_{\mathrm{s}\,z}^2\, a^2}{2\,\rho^2}. \tag{50}$$

انتگرال ِ P_+ بر سطح ِ بالایی یِ چنبره را با F_+ نشان میدهم:

$$F_+ = \mu_0\,\pi\,a^2\,J_{\mathrm{s}\,z}^2\,\ln\frac{R}{a}. \tag{51}$$

این هم ان جمله یِ متناظر با $J_{\mathrm{s}\,z}$ در F_z، یعنی جمله یِ متناظر با $J_{\mathrm{s}\,z}$ در طرف ِ راست ِ (38)، است. البته این نیرو واقعَن بر استوانه وارد نمیشود، بل که بر سطح ِ بالایی یِ چنبره وارد میشود.

از (25) میشود نسبت به R هم مشتق گرفت. نتیجه فشار ِ P_R در لبه یِ بیرونی یِ چنبره است:

$$2\,\pi\,R\,h\,P_R = \frac{\mu_0\,h\,I_z^2}{4\,\pi\,R}. \tag{52}$$

که یعنی،

$$P_R = \frac{\mu_0\,I_z^2}{8\,\pi^2\,R^2}. \tag{53}$$

یا،

$$P_R = \frac{\mu_0\,J_{\mathrm{s}\,R}^2}{2}. \tag{54}$$

$J_{\mathrm{s}\,R}$ مئلفه یِ ارتفاعی یِ جریان ِ سطحی در لبه یِ بیرونی یِ چنبره (در واقع تنها-مئلفه یِ جریان ِ سطحی در لبه یِ بیرونی یِ چنبره) است:

$$J_{\mathrm{s}\,R} = -J_{\mathrm{s}\,z}\,\frac{a}{R}. \tag{55}$$

یا،

$$J_{\mathrm{s}\,R} = -\frac{I_z}{2\,\pi\,R}. \tag{56}$$

P_R فشار ی ست که سطح ِ بیرونی یِ چنبره را به بیرون میرانَد.

3.3 سیملوله

جریان ِ استوانه را میشود با یک سیم ِ حامل- ِ-جریان ساخت که دُر ِ استوانه پیچیده شده. جریان ِ سیم را با I نشان میدهم. گیرم سیم N بار دُر ِ استوانه پیچیده. دیده میشود

$$I_\phi = N\,I. \tag{57}$$

$$I_z = I. \tag{58}$$

یا،

$$J_{\mathrm{s}\,\phi} = \frac{N\,I}{h}. \tag{59}$$

$$J_{\mathrm{s}\,z} = \frac{I}{2\,\pi\,a}. \tag{60}$$

با این جریانها، فشار در سطح ِ استوانه هم ان (30) میشود. یعنی،

$$P = \frac{\mu_0}{2}\,\left(\frac{N^2}{h^2} - \frac{1}{4\,\pi^2\,a^2}\right)\,I^2. \tag{61}$$

اما نیرو یِ وارد بر لبه یِ بالایی یِ استوانه (بخش ی از استوانه که به لبه یِ بالایی نزدیک است) چنین میشود.

$$F_z = -\frac{\mu_0\,\pi\,a^2\,J_{\mathrm{s}\,\phi}^2}{2}. \tag{62}$$

یعنی،

$$F_z = -\frac{\mu_0\,\pi\,a^2\,N^2\,I^2}{2\,h^2}. \tag{63}$$

مئلفه یِ ارتفاعی یِ جریان ِ سطحی، در نیرو یِ ارتفاعی وارد نمیشود.

یک حالت ِ حدی این است که دُر-بر-طول خیل ی بزرگ است (خیل ی بزرگتر از وارون ِ محیط ِ استوانه است):

$$\frac{N}{h} \gg \frac{1}{2\,\pi\,a}. \tag{64}$$

در این حالت ،

$$P \approx \frac{\mu_0\, N^2\, I^2}{2\, h^2}. \tag{65}$$

و مثلفه یِ ارتفاعی یِ جریان ِ سطحی، در فشار هم وارد نمیشود.

4 پانوشتها

[1] Heaviside

[2] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 4