X1-170 (2023/02/20)

میدانِ مغناطیسی و نیرو برا یِ یک چنبره یِ دایرِئی یِ حاملَِ جریان

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

از یک چنبره یِ دایرِئی یک جریانِ سمتی-متقارن و مستقل-از-زمان میگذرد. میدانِ مغناطیسی و نیرو (یا فشار) محاسبه میشوند. نتایج با نتایجِ متناظر با یک استوانه یِ دایرِئی یِ بلند مقایسه میشوند.

0 درامد

$\mathbb{T}$ یک چنبره یِ دایرِئی ست، که از دَورانِ دایره یِ $\mathbb{C}$ به شعاعِ a دُرِ محورِ z ساخته شده. دایره یِ $\mathbb{C}$ و محورِ z در یک صفحه اند، و فاصله یِ مرکزِ $\mathbb{C}$ تا محورِ z برابر با b است. $\mathbb{T}$ مرزِ مجموعه یِ سه-بُعدی یِ (کران-دارِ) $\mathbb{D}$ است، و $\mathbb{C}$ مرزِ قرصِ $\mathbb{S}$ است.

بردارِ مکان را با $\boldsymbol{r}$ نشان میدهم. (ρ, ϕ, z) مختصاتِ استوانِئی یَند. یک بردارِ مماس بر چنبره بردارِ یکه یِ سمتی ست، که آن را با $\hat{\boldsymbol{f}}$ نشان میدهم. بردارِ یکه یِ عمود بر چنبره به سو یِ بیرون را با $\hat{\boldsymbol{n}}$ نشان میدهم. $\hat{e}$ را هم یک بردارِ یکه تعریف میکنم که بر $\hat{\boldsymbol{f}}$ و $\hat{\boldsymbol{n}}$ عمود است و $(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{e}, \hat{\boldsymbol{f}})$

راست-دست است:

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{e}}. \tag{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{f}} \times \hat{\boldsymbol{n}}. \tag{2}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}} \times \hat{\boldsymbol{f}}. \tag{3}$$

از چنبره جریان ی سمتی-متقارن و مستقل-از-زمان میگذرد. جریان ِ سطحی ($\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$) چنین است.

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{e}}\, J_{\mathrm{s}\,e} + \hat{\boldsymbol{f}}\, J_{\mathrm{s}\,f}. \tag{4}$$

این جریان- ِ-سطحی متناظر با جریانها یِ I_e و I_f است:

$$I_e = 2\,\pi\,\rho\, J_{\mathrm{s}\,e}. \tag{5}$$

$$I_f = \int_{\mathbb{C}} (\mathrm{d}\,\ell)\, J_{\mathrm{s}\,f}. \tag{6}$$

$(\mathrm{d}\,\ell)$ عنصر ِ طول است و I_e و I_f ثابت َند. میدان ِ مغناطیسی ($\boldsymbol{B}$) چنین میشود.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_{\perp} + \hat{\boldsymbol{f}}\, B_f. \tag{7}$$

که $\boldsymbol{B}_{\perp}$ بر $\hat{\boldsymbol{f}}$ عمود است و تقارن ِ سمتی دارد. همچنین،

$$B_f = \frac{\mu_0\, I_e}{2\,\pi\,\rho}\, \boldsymbol{\Theta}(\mathbb{D}, \boldsymbol{r}). \tag{8}$$

و بستگی-به-مکان ِ $J_{\mathrm{s}\,f}$ چنان است که

$$\boldsymbol{B}_{\perp}(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{D}. \tag{9}$$

μ_0 تراوایی یِ مغناطیسی (در خلئ) است. $\boldsymbol{\Theta}$ (گسترش-یافته یِ) تابع ِ هِویسایِد [1] است:

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbb{X}, \mathfrak{x}) = 0, \quad \mathfrak{x} \notin \mathbb{X}. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbb{X}, \mathfrak{x}) = 1, \quad \mathfrak{x} \in \mathbb{X}. \tag{11}$$

1 نیرو و انرژی

چنان که در مثلَن [2] آمده (نَ با دقیقَن هم ین نمادها)، و با هم ان نماد-گذاری یِ [3]،

$$\mathrm{d}\,W = F_\xi\,\mathrm{d}\,\xi. \tag{12}$$

که F_ξ نیرو یِ (تعمیم-یافته یِ) متناظر با مختصه یِ ξ است، ضریب ِ $(\mathrm{d}\,\xi)$ در رابطه یِ کار (W) با تغییر ِ ξ. این نیرو را میشود با استفاده از انرژی یِ پتانسیل حساب کرد:

$$-F_\xi = \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\xi}\right)_X. \tag{13}$$

$$F_\xi = \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\xi}\right)_Y. \tag{14}$$

U انرژی یِ پتانسیل است و شاخص ِ 3 به معنی یِ این است که مشتق-گیری در 3 ِ ثابت انجا شده. X پاسخ، و Y رانش است. برا یِ سیستمها یِ مغناطیسی، پاسخ Φ (شار ِ مغناطیسی)، و رانش I (جریان) است.

$$X = \Phi. \tag{15}$$

$$Y = I. \tag{16}$$

پس برا یِ سیستمها یِ مغناطیسی،

$$-F_\xi = \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\xi}\right)_\Phi. \tag{17}$$

$$F_\xi = \left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\xi}\right)_I. \tag{18}$$

2 انرژی

انرژی یِ پتانسیل (به خاطر ِ میدان ِ مغناطیسی) چنین است.

$$U = \int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}{2\,\mu_0}. \tag{19}$$

این را چنین مینویسم.

$$U = U_{\rm in} + U_{\rm out}. \tag{20}$$

$U_{\rm in}$ انتگرالِ چگالی-یِ-انرژی بر $\mathbb{D}$ (درونِ چنبره)، و $U_{\rm out}$ چگالی-یِ-انرژی بر $(\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{D})$ (بیرونِ چنبره) است:

$$U_{\rm in} = \int_{\mathbb{D}} (\mathrm{d}\,V)\,\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}{2\,\mu_0}. \tag{21}$$

$$U_{\rm out} = \int_{\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{D}} (\mathrm{d}\,V)\,\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}{2\,\mu_0}. \tag{22}$$

دیده میشود

$$U_{\rm in} = \int_0^{2\,\pi} (\mathrm{d}\,\phi)\,\int_{b-a}^{b+a} (\rho\,\mathrm{d}\,\rho)\,\int_{-\sqrt{a^2-(\rho-b)^2}}^{\sqrt{a^2-(\rho-b)^2}} (\mathrm{d}\,z)\,\frac{\mu_0\,I_e^2}{8\,\pi^2\,\rho^2}. \tag{23}$$

که نتیجه میدهد

$$U_{\rm in} = \frac{\mu_0\,(b-\sqrt{b^2-a^2})\,I_e^2}{2}. \tag{24}$$

محاسبه یِ $U_{\rm out}$ به این سادگی نیست، چون محاسبه یِ میدانِ مغناطیسی بیرونِ چنبره خیلی ساده نیست. محاسبه یِ تقریبی یِ $U_{\rm out}$ ساده میشود، اگر چنبره نازک باشد. این که چنبره نازک است، یعنی

$$a \ll b. \tag{25}$$

گیرم چنین است. در این صورت شکلِ جریان و میدان ساده میشود. روابطِ (5) و (6) چنین میشوند:

$$I_e = 2\,\pi\,b\,J_{{\rm s}\,e}. \tag{26}$$

$$I_f = 2\,\pi\,a\,J_{{\rm s}\,f}. \tag{27}$$

از جمله، $J_{{\rm s}\,e}$ و $J_{{\rm s}\,f}$ مستقل از مکان میشوند. رابطه یِ (8) هم میشود

$$B_f = \frac{\mu_0\,I_e}{2\,\pi\,b}\,\boldsymbol{\Theta}(\mathbb{D},\boldsymbol{r}). \tag{28}$$

$\boldsymbol{B}_\perp$ فقط در نزدیکی یِ چنبره ساده میشود:

$$\boldsymbol{B}_\perp(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{f}}\,\frac{\mu_0\,I_e}{2\,\pi\,\varrho}\,[1-\boldsymbol{\Theta}(\mathbb{D},\boldsymbol{r})],\quad \varrho \ll b. \tag{29}$$

که ϱ فاصله از دایره یِ حاصل از دَوران ِ مرکز ِ $\mathbb{C}$ دُر ِ محور ِ z (به تقریب، فاصله تا محور ِ استوانه یِ حاصل از تقریب-کردن ِ چنبره) است:

$$\varrho = \sqrt{(\rho-b)^2+z^2}. \tag{30}$$

از جمله،

$$\boldsymbol{B}_\perp(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{f}}\,\frac{\mu_0\,I_e}{2\,\pi\,a}, \qquad \varrho \to a^+. \tag{31}$$

$(\varrho \to a^+)$، یعنی بر سطح ِ (بیرونی یِ) چنبره.

دور از چنبره، میدان ِ مغناطیسی ضعیف میشود. پس بخش ِ غالب ِ U_{out} از جاها یی (بیرون ِ چنبره) میئاید که به چنبره نزدیک َند: U_{out} را میشود با $U_{\mathrm{out}\,0}$ تقریب کرد، که

$$U_{\mathrm{out}\,0} = (2\,\pi\,b)\int_0^{2\,\pi}(\mathrm{d}\,\varphi)\int_a^R(\varrho\,\mathrm{d}\,\varrho)\,\frac{\mu_0\,I_f^2}{8\,\pi^2\,\varrho^2}. \tag{32}$$

(ϱ,φ) مختصات ِ قطبی در صفحه یِ شامل ِ $\mathbb{C}$ اند؛ با مبدئ ی که بر مرکز ِ $\mathbb{C}$ گذاشته شده. R از مرتبه یِ b است:

$$R = \zeta\,b. \tag{33}$$

که ζ عدد ی بی-بُعد و از مرتبه یِ یک است. از (32) نتیجه میشود

$$U_{\mathrm{out}\,0} = \frac{\mu_0\,b\,I_f^2}{2}\,\ln\frac{R}{a}. \tag{34}$$

یا،

$$U_{\mathrm{out}\,0} = \frac{\mu_0\,b\,I_f^2}{2}\,\ln\frac{\zeta\,b}{a}. \tag{35}$$

برا یِ محاسبه یِ تقریبی یِ نیرو، وقت (25) برقرار است، U_0 را به جا یِ U به کار میبَرم:

$$U_0 = U_{\rm in} + U_{\rm out\,0}. \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$U_0 = \frac{\mu_0}{2}\,\left[(b - \sqrt{b^2 - a^2})\,I_e^2 + b\,I_f^2\,\ln\frac{\zeta\,b}{a}\right]. \tag{37}$$

3 نیرو

با تقریب-کردن ِ U با U_0، روابط ِ (17) و (18) چنین میشوند.

$$-F_\xi = \left(\frac{\partial\,U_0}{\partial\,\xi}\right)_\Phi. \tag{38}$$

$$F_\xi = \left(\frac{\partial\,U_0}{\partial\,\xi}\right)_I. \tag{39}$$

حالتها یی را بررسی میکنم که ξ برابر با a یا b است.

3.1 فشار

در این حالت

$$\chi = a. \tag{40}$$

و از (12) دیده میشود

$$F_a = \int_{\mathbb{T}}(\mathrm{d}\,S)\,P. \tag{41}$$

که $(\mathrm{d}\,S)$ عنصر ِ مساحت، و P فشار (ِ در سمت ِ افزایش ِ a) است. با شرط ِ (25)، این رابطه ساده میشود.

$$F_a = 4\,\pi^2\,a\,b\,P. \tag{42}$$

از جمله، P مستقل از مکان میشود.

از روابط ِ (37) و (39) نتیجه میشود

$$F_a = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{a\,I_e^2}{\sqrt{b^2-a^2}} - \frac{b\,I_f^2}{a}\right). \tag{43}$$

یا، با توجه به شرط ِ (25)،

$$F_a = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{a\,I_e^2}{b} - \frac{b\,I_f^2}{a}\right). \tag{44}$$

به این ترتیب،

$$P = \frac{\mu_0\,(J_{\mathrm{s}\,e}^2 - J_{\mathrm{s}\,f}^2)}{2}. \tag{45}$$

این را مستقیم هم میشد حساب کرد:

$$P = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\,(\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\times\tilde{\boldsymbol{B}}). \tag{46}$$

که $\tilde{\boldsymbol{B}}$ میانگین ِ $\boldsymbol{B}$ در دُ-سو یِ سطح است. از (7) و (28) و (31) نتیجه میشود

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0\,(\hat{\boldsymbol{e}}\,J_{\mathrm{s}\,f} + \hat{\boldsymbol{f}}\,J_{\mathrm{s}\,e})}{2}. \tag{47}$$

این را در (46) میگذارم. با استفاده از (3) رابطه یِ (45) نتیجه میشود.

دیده میشود (45) هم ان رابطه یِ (30) در [3] است.

3.2 کشش

در این حالت

$$\chi = b. \tag{48}$$

و از (12) دیده میشود

$$F_b = -2\,\pi\,T. \tag{49}$$

که T نیرو یِ کشش (در سمت ِ کاهش ِ b) است. از روابط ِ (37) و (39) نتیجه میشود

$$F_b = \frac{\mu_0}{2}\,\left[\left(1-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)\,I_e^2+\left(1+\ln\frac{\zeta\,b}{a}\right)\,I_f^2\right]. \tag{50}$$

یا، با توجه به شرط ِ (25)،

$$F_b = \mu_0\,\left(-\frac{a^2\,I_e^2}{4\,b^2}+\frac{I_f^2}{2}\,\ln\frac{\zeta\,b}{a}\right). \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$T = \mu_0\,\pi\,a^2\,\left(\frac{J_{\mathrm{s}\,e}^2}{2}-J_{\mathrm{s}\,f}^2\,\ln\frac{\zeta\,b}{a}\right). \tag{52}$$

این هم شبیه ِ رابطه یِ (38) در [3] است.

3.3 سیملوله یِ چنبرِئی

جریان ِ چنبره را میشود با یک سیم ِ حامل- ِ-جریان ساخت که دُر ِ چنبره پیچیده شده. جریان ِ سیم را با I نشان میدهم. گیرم سیم N بار دُر ِ چنبره پیچیده. دیده میشود

$$I_e = N\,I. \tag{53}$$

$$I_f = I. \tag{54}$$

یا،

$$J_{\mathrm{s}\,e} = \frac{N\,I}{2\,\pi\,b}. \tag{55}$$

$$J_{\mathrm{s}\,f} = \frac{I}{2\,\pi\,a}. \tag{56}$$

با این جریانها، فشار در سطح ِ استوانه این میشود.

$$P = \frac{\mu_0}{8\,\pi^2}\,\left(\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,I^2. \tag{57}$$

نیرو یِ کشش هم چنین میشود.

$$T = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\left(\frac{a^2\,N^2}{2\,b^2} - \ln\frac{\zeta\,b}{a}\right)\,I^2. \tag{58}$$

یک حالت ِ حدی این است که دُر-بر-طول خیل ی بزرگ است (خیل ی بزرگتر از وارون ِ محیط ِ $\mathbb{C}$ است):

$$\frac{N}{2\,\pi\,b} \gg \frac{1}{2\,\pi\,a}. \tag{59}$$

در این حالت ،

$$P \approx \frac{\mu_0\,N^2\,I^2}{8\,\pi^2\,b^2}. \tag{60}$$

یک حالت ِ خاصتر این است که،

$$\frac{N\,a}{b} \gg \left(\ln\frac{\zeta\,b}{a}\right)^{1/2}. \tag{61}$$

در این حالت، علاوه بر (60)،

$$T \approx \frac{\mu_0\,a^2\,N^2\,I^2}{8\,\pi\,b^2}. \tag{62}$$

4 پانوشتها

[1] Heaviside

[2] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[3] محمد خرمی؛ «میدان ِ مغناطیسی و نیرو برا یِ یک استوانه یِ دایرِئی یِ حامل ِ جریان» X1-169 (2023/01/26)