**X1-171 (2023/04/19)**

# تخمینِ وردایی و نایقینی یِ آن

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

با چند بار سنجشِ یک کمیت، میشود تخمین ی برا یِ مقدارِ آن کمیت و نایقینی یِ آن به دست آورد. اینجا تخمین ی برا یِ وردایی یِ آن کمیت و نایقینی یِ آن وردایی به دست میئاید.

## 0 درامد

این ادامه یِ [1] است. قرار است با سنجش، اطلاعات ی در باره یِ کمیتِ $X$ به دست آید. در [1] تخمین ی برا یِ مقدارِ کمیت و نایقینی یِ آن ارائه شد. اینجا هدف تخمینِ وردایی یِ کمیت است. هم ان قراردادها یِ [1] را به کار میبَرم. $n$ بار سنجش انجام میشود. مقدارها یِ $x^1$ تا $x^n$ به دست میآید. میانگینِ $\boldsymbol{x}$ با وزنِ $\boldsymbol{\alpha}$ را با $\mu(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{x})$ نشان میدهم:

$$\mu(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{s}}. \tag{1}$$

که

$$s^i = 1. \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{v} = \gamma_i\, v^i, \tag{3}$$

و $\alpha_i$ ها نامنفی یند و همه یِشان صفر نیستند. مقدارِ چشمداشتی یِ کمیتِ $\mathfrak{X}$ را با $\mathsf{E}(\mathfrak{X})$، و همبستگی یِ $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ را با $\mathsf{C}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ نشان میدهم:

$$\mathsf{C}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) = \mathsf{E}\{[\mathfrak{X}-\mathsf{E}(\mathfrak{X})]\,[\mathfrak{Y}-\mathsf{E}(\mathfrak{Y})]\}. \tag{4}$$

تخمین برا یِ $\mathfrak{X}$ را با $\mathsf{es}(\mathfrak{X})$ نشان میدهم. برا یِ خُدِ $x$، میگیرم

$$\mathsf{es}(x) = \mu(\boldsymbol{s}\,C^{-1};\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

که،

$$C^{ij} = \mathsf{C}(X^i, X^j). \tag{6}$$

و $X^i$ متغیرِ تصادفی یِ متناظر با سنجشِ $i$ اُمِ کمیتِ $X$ است:

$$\mathsf{E}(X) = x. \tag{7}$$

$$\mathsf{E}(X^i) = x\, s^i. \tag{8}$$

نایقینی برا یِ $\mathfrak{X}$ را با $\mathsf{un}(\mathfrak{X})$ نشان میدهم. برا یِ خُدِ $x$، میگیرم

$$\mathsf{un}(x) = \sqrt{\mathsf{E}\{[\mu(\boldsymbol{s}\,C^{-1};\boldsymbol{X})-x]^2\}}. \tag{9}$$

انحرافِ $X^i$ از $x$ را هم با $\tilde{X}^i$ نشان میدهم:

$$\tilde{X}^i = X^i - x. \tag{10}$$

بسته،

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} - x\,\boldsymbol{s}. \tag{11}$$

پس،

$$\mathsf{E}(\tilde{X}^i) = 0. \tag{12}$$

$$\mathsf{E}(\tilde{X}^i\,\tilde{X}^j) = C^{i\,j}. \tag{13}$$

همچنین،

$$[\mathsf{un}(x)]^2 = \mathsf{E}\{[\mu(\boldsymbol{s}\,C^{-1};\tilde{\boldsymbol{X}})]^2\}. \tag{14}$$

که نتیجه میدهد

$$[\mathsf{un}(x)]^2 = \frac{1}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}. \tag{15}$$

# 1 وردایی و نایقینی یِ آن

وردایی یِ $\boldsymbol{x}$ با وزن ِ $M$ را با $\mathsf{var}(M;\boldsymbol{x})$ نشان میدهم:

$$\mathsf{var}(M;\boldsymbol{x}) = \frac{\{\boldsymbol{x} - [\mu(\boldsymbol{s}\,M;\boldsymbol{x})]\,\boldsymbol{s}\}\,M\,\{\boldsymbol{x} - [\mu(\boldsymbol{s}\,M;\boldsymbol{x})]\,\boldsymbol{s}\}}{\boldsymbol{s}\,M\,\boldsymbol{s}}. \tag{16}$$

که $M$ یک ماتریس ِ متقارن ِ مثبت ِ معین است. از جمله،

$$\mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}\,C^{-1}\,\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}} - \left(\frac{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2. \tag{17}$$

یا،

$$\mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x}) = \frac{\tilde{\boldsymbol{x}}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}} - \left(\frac{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2. \tag{18}$$

که،

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - x\,\boldsymbol{s}. \tag{19}$$

وردایی یِ $\boldsymbol{X}$ با وزن ِ $C^{-1}$ را با $V$ نشان میدهم:

$$V = \mathsf{var}(C^{-1}, \boldsymbol{X}). \tag{20}$$

یعنی،

$$V = \frac{\tilde{\boldsymbol{X}}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}} - \left(\frac{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2. \tag{21}$$

مقدار ِ چشمداشتی یِ $V$ را با $v$ نشان میدهم:

$$v = \mathsf{E}(V). \tag{22}$$

دیده میشود

$$v = \frac{n-1}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}. \tag{23}$$

دیده میشود

$$v = (n-1)\,[\mathsf{un}(x)]^2. \tag{24}$$

به این ترتیب یک تخمین برا یِ $\mathsf{un}(x)$ به دست میئاید:

$$\mathsf{es}\{[\mathsf{un}(x)]^2\} = \frac{\mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x})}{n-1}. \tag{25}$$

یا،

$$\mathsf{es}(v) = \mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x}). \tag{26}$$

نایقینی یِ $v$ را چنین میگیرم.

$$\mathsf{un}(v) = \sqrt{\mathsf{C}(V,V)}. \tag{27}$$

البته،

$$\mathsf{C}(V,V) = \mathsf{E}(V^2) - v^2. \tag{28}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{C}(V,V) = \mathsf{E}\left\{\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{X}}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}} - \left(\frac{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2\right]^2\right\} - \left(\frac{n-1}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{C}(V,V) = A_{i\,j\,k\,l}\,Q^{i\,j\,k\,l} - \left(\frac{n-1}{\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s}}\right)^2. \tag{30}$$

که،

$$\begin{aligned} A_{i\,j\,k\,l} &= \frac{(C^{-1})_{i\,j}\,(C^{-1})_{k\,l}}{(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})^2} - 2\,\frac{(C^{-1})_{i\,j}\,(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_k\,(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_l}{(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})^3} \\ &\quad + \frac{(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_i\,(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_j\,(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_k\,(\boldsymbol{s}\,C^{-1})_l}{(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})^4}. \end{aligned} \tag{31}$$

$$Q^{i\,j\,k\,l} = \mathsf{E}(\tilde{X}^i\,\tilde{X}^j\,\tilde{X}^k\,\tilde{X}^l). \tag{32}$$

اگر چگالی-یِ-احتمال ِ $\boldsymbol{X}$ گاؤسی باشد، $Q$ (تابع ِ چهار-نقطِئی) را میشود بر حسب ِ $C$ (تابع ِ دُ-نقطِئی) نوشت. این را با $Q_2$ نشان میدهم:

$$(Q_2)^{i\,j\,k\,l} = C^{i\,j}\,C^{k\,l} + C^{i\,k}\,C^{j\,l} + C^{I\,l}\,C^{j\,k}. \tag{33}$$

انحراف ِ $Q$ از $Q_2$ را با $W_4$ نشان میدهم:

$$Q = Q_2 + W_4. \tag{34}$$

دیده میشود

$$A_{i\,j\,k\,l}\,(Q_2)^{i\,j\,k\,l} = \frac{n^2-1}{(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})^2}. \tag{35}$$

پس،

$$\mathsf{C}(V,V) = \mathsf{C}_2(V,V) + A_{i\,j\,k\,l}\,(W_4)^{i\,j\,k\,l}. \tag{36}$$

که،

$$\mathsf{C}_2(V,V) = \frac{2\,(n-1)}{(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})^2}. \tag{37}$$

$\mathsf{C}_2$ چیز ی ست که با چگالی-یِ-احتمال ِ گاؤسی به دست میئاید.

(26) و (27)، به ترتیب، تخمین ِ $v$ و نایقینی یِ $v$ را میدهند. (36) و (37) هم طرف-ِ-راست ِ (27) را میدهند. در این روابط $(\boldsymbol{s}\,C^{-1}\,\boldsymbol{s})$ ظاهر میشود، که (23) آن را به $v$ مربوط میکند. (26) هم تخمین ی برا یِ $v$ میدهد:

$$\mathsf{C}_2(V,V) = \frac{2\,v^2}{(n-1)}. \tag{38}$$

پس،

$$\mathsf{es}[\mathsf{C}_2(V,V)] = \frac{2\,[\mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x})]^2}{n-1}. \tag{39}$$

برا یِ محاسبه یِ تخمین ی از نایقینی یِ $v$، باید $W_4$ هم معلوم باشد. ولی اگر چگالی-یِ-احتمال گاؤسی باشد $W_4$ صفر است و، با استفاده از (27) و (39)، چنین-تخمین ی برا یِ نایقینی یِ $v$ به دست میئاید.

$$\begin{aligned} &W_4 = 0 \;\Rightarrow \\ &\mathsf{es}\{[\mathsf{un}(v)]^2\} = \frac{2\,[\mathsf{var}(C^{-1};\boldsymbol{x})]^2}{n-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

## 2 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «سنجش، تخمین، نایقینی» X1-99 (2014/04/25)