X1-175 (2023/10/19)

مکانیک- ِ-آماری با چشمه یِ سرعت

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

یک سیستم ِ آماری در دما یِ ثابت بررسی میشود، که سرعت ِ کُپِئی یِ آن معین است. نشان داده میشود چگالی-یِ-احتمال ِ متناظر با این سیستم هم ان چگالی-یِ-احتمال ِ کانُنیک است، که در آن همیلتنی با یک همیلتنی یِ خیزیده جایگزین شده.

0 درامد

یک سیستم ِ آماری با یک چشمه به دما یِ T در تعادل ِ گرمایی ست. β چنین تعریف میشود.

$$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}\, T}. \tag{1}$$

k_{B} ثابت ِ بُلتسمان [1] است. چگالی-یِ-احتمال ِ این که سیستم در حالت ِ x باشد $\rho(x)$ است:

$$\rho(x) = Z^{-1}\, \mathsf{B}(x). \tag{2}$$

که B وزن- ِ-بُلتسمان [1] و Z تابع- ِ-پارش است:

$$\mathsf{B}(x) = \exp[-\beta\, H(x)]. \tag{3}$$

$$Z = \int (\mathrm{d}\, V)\, \mathsf{B}. \tag{4}$$

$H(x)$ انرژی یِ حالت ِ x است، و $(\mathrm{d}\, V)$ عنصر- ِ-حجم است:

$$(\mathrm{d}\, V)(x) = (\mathrm{d}^m\, x)\, \mathfrak{D}(x). \tag{5}$$

که m بُعد ِ فضا ست. به $\mathfrak{D}$ چگالی-یِ-حجم میگویم. فرض شده حالتها یِ سیستم پیوسته اند. از این پس هم هم ین فرض به کار میرود.

از (2) و (3) از جمله نتیجه میشود اگر $\mathfrak{F}$ یک تابع ِ حالت باشد،

$$\langle \mathfrak{F} \rangle = Z^{-1} \int (\mathrm{d}\, V)\, \mathsf{B}\, \mathfrak{F}. \tag{6}$$

که $\langle \mathfrak{X} \rangle$ مقدار- ِ-چشمداشتی یِ $\mathfrak{X}$ است. یک حالت ِ خاص این است که $\mathfrak{F}$ برابر است با وارون ِ چگالی-یِ-حجم، ضرب در مشتق ِ H (نسبت به یک ی از x^a ها):

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{D}^{-1}\, \partial_a\, H. \tag{7}$$

در این صورت،

$$\langle \mathfrak{F} \rangle = Z^{-1} \int (\mathfrak{D}^{-1}\, \mathrm{d}\, V)\, \mathsf{B}\, (\partial_a\, H). \tag{8}$$

یا،

$$\langle \mathfrak{F} \rangle = Z^{-1}\, (-\beta^{-1}) \int (\mathfrak{D}^{-1}\, \mathrm{d}\, V)\, (\partial_a\, \mathsf{B}). \tag{9}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle \mathfrak{F} \rangle = 0. \tag{10}$$

در رسیدن به برابری یِ اخیر؛ این فرض به کار رفته که ناحیه یِ انتگرال-گیری کراندار است و مرز ندارد، یا کراندار است و د رمرزِ آن B صفر میشود، یا بیکران است و وقت ی x بزرگ میشود B(x) با سرعتِ کافی به صفر میگراید. رابطه یِ (10) یعنی،

$$\langle \mathfrak{D}^{-1}\,\partial_a\,H\rangle = 0. \tag{11}$$

اینها را (نَ لزومَن با هم ین نماد-گذاری) میشود در مثلَن [2] یافت.

1 مقدارِ چشمداشتی یِ سرعت

حالت ی را بررسی میکنم که فضا یِ حالت یک فضا-یِ-فاز است. در این صورت یک ماتریسِ همتافته (J) هست و

$$\mathfrak{D} = |\det(\mathcal{J})|^{-1/2}. \tag{12}$$

که،

$$\mathcal{J}^a{}_b = J^{a\,c}\,\delta_{c\,b}. \tag{13}$$

سرعت (ِ متناظر با مختصاتِ فضا-یِ-فاز، مکان یا تکانه) را با v نشان میدهم:

$$v^a = \dot{x}^a. \tag{14}$$

که $\dot{\mathfrak{x}}$ مشتقِ $\mathfrak{x}$ نسبت به زمان است. معادله-یِ-حرکت برا یِ x چنین است.

$$v^a = J^{a\,b}\,\partial_b\,H. \tag{15}$$

که یعنی،

$$\dot{x}^a = J^{a\,b}\,\partial_b\,H. \tag{16}$$

x را میشود بر حسبِ مختصاتِ کانُنیک نوشت:

$$x = (q, p). \tag{17}$$

که q مکان و p تکانه است. رابطه یِ (16) چنین میشود.

$$\dot{q}^i(q, p) = \frac{\partial\,[H(q, p)]}{\partial\, p_i}. \tag{18}$$

$$-\dot{p}_i(q, p) = \frac{\partial\,[H(q, p)]}{\partial\, q^i}. \tag{19}$$

با مختصاتِ کانُننیک، مثلفِها یِ ماتریسِ همتافته ثابت َند: برا یِی سیستم ی با n درجه یِ آزادی،

$$J^{a\,b} = 1, \qquad b - a = n. \tag{20}$$

$$-J^{a\,b} = 1, \qquad a - b = n. \tag{21}$$

$$J^{a\,b} = 0, \quad |a - b| \neq n. \tag{22}$$

که

$$m = 2\,n. \tag{23}$$

به این ترتیب $\mathfrak{D}$ هم ثابت است. در واقع،

$$\mathfrak{D} = 1. \tag{24}$$

و از (11) نتیجه میشود

$$\langle J^{a\,b}\,\partial_b\,H\rangle = 0. \tag{25}$$

که یعنی،

$$\langle v^a\rangle = 0. \tag{26}$$

یا،

$$\langle \dot{x}^a \rangle = 0. \tag{27}$$

و این یعنی

$$\langle x^a \rangle^{\cdot} = 0. \tag{28}$$

رابطه یِ (27) حالتِ خاص ی از رابطه یِ زیر است.

$$\langle \{\mathfrak{F}, H\} \rangle = 0. \tag{29}$$

که $\mathfrak{F}$ یک تابعِ حالت است و $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$ کروشه-یِ-پُوَسُن [3]ِ $\mathfrak{X}$ با $\mathfrak{Y}$ است. برا یِ اثباتِ (29)، نشان میدهم

$$\int (\mathrm{d}\, V)\, \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = 0. \tag{30}$$

مختصات ی که در انتگرال-گیری به کار رفته اند لزومَن کانُنیک نیستند. دیده میشود

$$\int (\mathrm{d}\, V)\, \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \int (\mathfrak{D}^{-1}\, \mathrm{d}\, V)\, \mathfrak{A}. \tag{31}$$

که،

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\, \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}. \tag{32}$$

پس،

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\, J^{a\, b}\, (\partial_a\, \mathfrak{X})\, (\partial_a\, \mathfrak{Y}). \tag{33}$$

که، با استفاده از پادتقارنِ J، چنین میشود.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\, J^{a\, b}\, \partial_b\, [(\partial_a\, \mathfrak{X})\, \mathfrak{Y}]. \tag{34}$$

همچنین،

$$\partial_b\,\mathfrak{D}=-\frac{\mathfrak{D}}{2}\,J_{a\,c}\,\partial_b\,J^{a\,c}. \qquad (35)$$

که J با شاخصِ پایین چنین است.

$$J_{a\,c}\,J^{a\,d}=\delta_c^d. \qquad (36)$$

به این ترتیب، با استفاده از (35)، دیده میشود

$$\mathfrak{D}^{-1}\,\partial_b\,(\mathfrak{D}\,J^{a\,b})=-\frac{1}{2}\,J_{c\,d}\,(\partial_b\,J^{c\,d})\,J^{a\,b}+\partial_b\,J^{a\,b}. \qquad (37)$$

کروشه یِ پُوَسُن [3] اتحادِ یاکُبی [4] را برمیئاورَد:

$$\{\mathfrak{X},\{\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}\}\}=\{\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\},\mathfrak{Z}\}+\{\mathfrak{Y},\{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}\}\}. \qquad (38)$$

از جمله،

$$\{x^a,\{x^b,x^c\}\}=\{\{x^a,x^b\},x^c\}+\{x^b,\{x^a,x^c\}\}. \qquad (39)$$

که نتیجه میدهد

$$J^{a\,d}\,\partial_d\,J^{b\,c}=J^{d\,c}\,\partial_d\,J^{a\,b}+J^{b\,d}\,\partial_d\,J^{a\,c}. \qquad (40)$$

این را در $J_{b\,c}$ ضرب میکنم:

$$J_{b\,c}\,J^{a\,d}\,\partial_d\,J^{b\,c}=2\,\partial_d\,J^{a\,d}. \qquad (41)$$

با استفاده از این، از (37) نتیجه میشود

$$\partial_b\,(\mathfrak{D}\,J^{a\,b})=0. \qquad (42)$$

از (34) و (42) هم نتیجه میشود

$$\mathfrak{A} = \partial_b\,[\mathfrak{D}\,J^{a\,b}\,(\partial_a\,\mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}]. \tag{43}$$

این را در (31) میگذارم. نتیجه میشود

$$\int(\mathrm{d}\,V)\,\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\} = \int(\mathfrak{D}^{-1}\,\mathrm{d}\,V)\,\partial_b\,[\mathfrak{D}\,J^{a\,b}\,(\partial_a\,\mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}]. \tag{44}$$

که (30) را نتیجه میدهد؛ اینجا هم با این فرض که ناحیه یِ انتگرال-گیری کراندار است و مرز ندارد، یا کراندار است و د رمرزِ آن B صفر میشود، یا بیکران است و وقت ی نقطه به بینهایت میگراید انتگرال-ده با سرعتِ کافی به صفر میگراید.

سرانجام،

$$\mathsf{B}\,\{\mathfrak{F},H\} = -\beta^{-1}\,\{\mathfrak{F},\mathsf{B}\}. \tag{45}$$

و البته،

$$\langle\{\mathfrak{F},H\}\rangle = Z^{-1}\,\int(\mathrm{d}\,V)\,\mathsf{B}\,\{\mathfrak{F},H\}. \tag{46}$$

پس،

$$\langle\{\mathfrak{F},H\}\rangle = Z^{-1}\,(-\beta^{-1})\,\int(\mathrm{d}\,V)\,\{\mathfrak{F},\mathsf{B}\}. \tag{47}$$

این، با استفاده از (30)، رابطه یِ (29) را نتیجه میدهد. البته

$$\dot{\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{F},H\}. \tag{48}$$

پس رابطه یِ (29) یعنی،

$$\langle\dot{\mathfrak{F}}\rangle = 0. \tag{49}$$

و این یعنی

$$\langle\mathfrak{F}\rangle^{\cdot} = 0. \tag{50}$$

که عجیب هم نیست: سیستم ایستا ست و مقدار-ِ -چشمداشتیها مستقل-از-زمانَند.

2 سرعتِ ناصفر

با چگالی-یِ-احتمال ی به شکلِ (2) تا (4) ، مقدار- ِ-چشمداشتی یِ سرعت صفر میشود. چه باید کرد تا چنین نشود؟ خاصتر، دنبالِ چگالی-یِ-احتمال ی شبیهِ (2) تا (4) ام، با یک $H_{\rm m}$ به جا یِ H، چنان که

$$\langle \dot{x}^a \rangle_{\rm m} = u^a. \tag{51}$$

که x^a ها مختصاتِ کانُنیک َند، و u^a ها ثابت َند. شاخصِ $\rm m$ نشانه یِ این است که (همه جا، از جمله در چگالی و میانگین-گیری) $H_{\rm m}$ جایگزینِ H شده.

یک راه این است که مختصات- ِ-کانُنیکِ جدیدِ $x^a_{\rm m}$ را چنین تعریف کنم.

$$x^a_{\rm m} = x^a - u^a\, t. \tag{52}$$

و هَمیلتنی یِ $H_{\rm m}$ را چنان بیابم که

$$\dot{x}^a_{\rm m} = \{x^a_{\rm m}, H_{\rm m}\}. \tag{53}$$

که یعنی،

$$\dot{x}^a - u^a = \{x^a_{\rm m}, H_{\rm m}\}. \tag{54}$$

البته،

$$\dot{x}^a = \{x^a, H\}. \tag{55}$$

$$\{x^a_{\rm m}, \mathfrak{X}\} = \{x^a, \mathfrak{X}\}. \tag{56}$$

به این ترتیب،

$$-u^a = \{x^a, H_{\rm m} - H\}. \tag{57}$$

که نتیجه می‌دهد

$$(H_{\rm m} - H)(x) = J_{a\,b}\, x^a\, u^b. \tag{58}$$

به این ترتیب،

$$H_{\rm m} = H + J_{a\,b}\, x^a\, u^b. \tag{59}$$

$$\rho_{\rm m}(x) = Z_{\rm m}^{-1}\, \mathsf{B}_{\rm m}(x). \tag{60}$$

$$\mathsf{B}_{\rm m}(x) = \exp[-\beta\, H_{\rm m}(x)]. \tag{61}$$

$$Z_{\rm m} = \int (\mathrm{d}\, V)\, \mathsf{B}_{\rm m}. \tag{62}$$

مفصل-شده یِ (59) می‌شود

$$H_{\rm m} = H + q^i\, f_i - p_i\, w^i. \tag{63}$$

که w و f سرعت‌ها یِ متناظر با، به ترتیب، q و p اند.

مشابه با آن چه با استفاده از H به دست آمد،

$$\langle v_{\rm m}^a \rangle_{\rm m} = 0. \tag{64}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\langle (v^a - u^a) \rangle_{\rm m} = 0. \tag{65}$$

یا،

$$\langle v^a \rangle_{\rm m} = u^a. \tag{66}$$

که هم ان (51) است.

3 پانوشت‌ها

[1] Boltzmann

[2] R. K. Pathria & Paul D. Beale; “Statistical mechanics” 3rd edition (Elsevier, 2013)

[3] Poisson

[4] Jacobi