X1-177 (2024/01/20)

چندقطبیها یِ الکتریکی، و شمارش

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

چندقطبیها یِ الکتریکی بر اساسِ مختصاتِ دکَرتی تعریف میشوند. تعدادِ مثلفه-یِ-مستقلها یِ اینها، بر حسبِ بُعدِ فضا و رتبه یِ چندقطبی به دست میئاید.

1 بسطِ چندقطبی-یِ-الکتریکی

پتانسیلِ الکترُستاتیک برا یِ یک تُزیع-ِ-بارِ جای-گزیده را میشود از رابطه یِ کولُن [1] به دست آورد.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int (\mathrm{d}\,V')\,[G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,\rho(\boldsymbol{r}'). \tag{1}$$

ϕ پتانسیلِ الکتریکی، ρ چگالی-یِ-بار، $\boldsymbol{r}$ مکان، و $(\mathrm{d}\,V)$ عنصر-ِ-حجم است. G هم تابع-ِ-گرین [2] (پتانسیلِ متناظر با یک بارِ نقطِئی) است. دور از تُزیع-ِ-بار، $[G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]$ را بر حسبِ مختصاتِ دکَرتی یِ $\boldsymbol{r}'$ بسط میدهم:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty}[G_{(\ell)\,i_1\cdots i_l}(\boldsymbol{r})]\,r'^{i_1}\cdots r'^{i_\ell}. \tag{2}$$

که $G_{(\ell)}$ به مشتق ِ ℓ اُم ِ G مربوط است:

$$G_{(\ell)\,i_1\cdots i_\ell} = \frac{(-1)^l\,\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_\ell}\,G}{\ell!}. \tag{3}$$

و ∂_i مشتق-گیری نسبت به مختصه یِ دِکَرتی یِ i است. از (1) و (2) نتیجه میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell)}{}^{i_1\cdots i_\ell}\,G_{(\ell)\,i_1\cdots i_\ell}(\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

که،

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell)}{}^{i_1\cdots i_\ell} = \int(\mathrm{d}\,V)\,[\rho(\boldsymbol{r})]\,r^{i_1}\cdots r^{i_\ell}. \tag{5}$$

به $\tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell)}$ پیش-چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ میگوییم. رُشن است که $\tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell)}$ متقارن است.

بسط ِ (2) برا یِ دور از تُزیع- ِ-بار نوشته شده، جا یی که r (طول ِ بردار ِ $\boldsymbol{r}$) بزرگ است، از جمله $\boldsymbol{r}$ صفر نیست:

$$\boldsymbol{r} \neq 0. \tag{6}$$

از این پس (6) را برقرار میگیرم.

تابع ِ گرین (جز در مبدئ) معادله یِ لَپلَس [3] را بر میئاورَد:

$$\delta^{i\,j}\,(\partial_i\,\partial_j\,G)(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{7}$$

که δ دلتا یِ کْرُنِکِر [4] است، و شاخصها با آن بالا-و-پایین میروند:

$$\mathfrak{X}_i = \delta_{i\,j}\,\mathfrak{X}^j. \tag{8}$$

$$\mathfrak{X}^i = \delta^{j\,i}\,\mathfrak{X}_j. \tag{9}$$

از (3) و (7) نتیجه میشود

$$\delta^{i_a\,i_b}\,G_{(\ell)\,i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_\ell} = 0. \tag{10}$$

این یعنی ردِ $G_{(\ell)}$ بر هر دُ-شاخصَ ش صفر است. نتیجه این که میشود به پیش-چندقطبی-یِ-الکتریکی چیز ی افزود که در دُ تا از شاخصها یَ ش با δ متناسب است: با این کار پتانسیلِ الکتریکی عوض نمیشود. از این استفاده میکنم و چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ را بخشِ بی-ردِ پیش-چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ تعریف میکنم. چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\mathcal{Q}_{(\ell)}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{Q}_{(\ell)} = \mathsf{S}\left[\sum_{\mathfrak{a}=0}^{[\ell/2]} c_{\mathfrak{a}}\, \delta^{\otimes \mathfrak{a}} \otimes \tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell,\mathfrak{a})}\right]. \qquad (11)$$

$[\mathfrak{x}]$ بخش-ِ-صحیحِ $\mathfrak{x}$ است: بزرگترین عدد-ِ-صحیح ی که از $\mathfrak{x}$ بزرگتر نیست. همچنین،

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell,\mathfrak{a})}{}^{i_1\cdots i_{l-2\,\mathfrak{a}}} = \tilde{\mathcal{Q}}_{(\ell)}{}^{j_1\cdots j_{\mathfrak{a}}}{}_{j_1\cdots j_{\mathfrak{a}}}{}^{i_1\cdots i_{\ell-2\,\mathfrak{a}}}. \qquad (12)$$

$\otimes$ ضربِ تانسُری ست:

$$(\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y})^{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} = \mathfrak{X}^{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{Y}^{\mathfrak{B}}. \qquad (13)$$

S متقارن-گر است:

$$(\mathsf{S}\,\mathfrak{X})^{i_1\cdots i_\ell} = \frac{1}{\ell!}\sum_{\sigma}\mathfrak{X}^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(\ell)}}. \qquad (14)$$

و در (14)، جمع-بندی رو یِ همه یِ جایگشتها یِ ℓ تایی ست. $c_{\mathfrak{a}}$ ها ثابتها یی یَند که چنین تعیین میشوند که ردِ $\mathcal{Q}_{(\ell)}$ بر هر-دُ-شاخصَ ش صفر باشد:

$$\delta_{i_a\,i_b}\,\mathcal{Q}_{(\ell)}{}^{i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_\ell} = 0. \qquad (15)$$

البته چون $\mathcal{Q}_{(\ell)}$ متقارن است، کافی ست رد بر دُ-شاخصِ اول صفر باشد:

$$\mathcal{Q}_{(\ell)}{}^{j}{}_{j}{}^{i_3\cdots i_\ell} = 0. \qquad (16)$$

2 تعدادِ مئلفه-یِ-مستقلها

تعدادِ پارامترها یِ مستقل در پیش-چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. پیش-چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ ℓ است. در یک تانسُرِ متقارنِ از رتبه یِ ℓ، مقدارِ هر مئلفه به فقط ν بستگی دارد، که

$$\nu = [\nu_{(1)}, \cdots \nu_{(\mathsf{n})}]. \tag{17}$$

که n بُعدِ فضا ست، $\nu_{(i)}$ تعدادِ شاخصها یی ست که برابر با i اند، و البته

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{n}} \nu_{(i)} = \ell. \tag{18}$$

یک تناظرِ یک-به-یک هست بینِ حالتها یِ ممکن برا یِ ν، با حالتها یِ ممکن برا یِ آرایشها یی از ℓ دایره و $(\mathsf{n}-1)$ خط : آرایشِ متناظر با ν میشود $\nu_{(1)}$ دایره بعد یک خط، بعد $\nu_{(2)}$ دایره، بعد یک خط، ...، بعد یک خط، بعد $\nu_{(\mathsf{n})}$ دایره. تعدادِ آرایشها یِ ممکن برا یِ این ℓ دایره و $(\mathsf{n}-1)$ خط هم انتخابِ $(\mathsf{n}-1)$ جا (جا یِ خطها) از $(\ell+\mathsf{n}-1)$ جا یِ ممکن است. پس تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ ℓ هم ان انتخابِ $(\mathsf{n}-1)$ از $(\ell+\mathsf{n}-1)$ میشود. به این ترتیب،

$$\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1}. \tag{19}$$

تعدادِ پارامترها یِ مستقل در چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ هم یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ ℓ است، اما با این قید که ردِ آن بر دُ-شاخصِ اولَ ش صفر است. پس $\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)}$ میشود تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارنِ از رتبه یِ ℓ، منها تعدادِ قیدها. اولی هم ان $\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ است. ردِ چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ (بر دُ-شاخصِ اولَ ش)، هم یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ $(\ell-2)$ است. پس تعدادِ قیدها برابر با تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ $(\ell-2)$ میشود. این تعداد هم هم ان $\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-2)}$ است. به این ترتیب،

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} - \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-2)}. \tag{20}$$

منظورَم از $\stackrel{\mathrm{g}}{=}$ این است که یعنی دُ-طرف ِ این علامت با هم برابر َند، در حالتها یِ نُعی. اینجا حالتها یِ نُعی متناظر َند با

$$\mathsf{n}+\ell>2. \tag{21}$$

اگر (21) براورده نشود، تعداد ِ قیدها را باید جداگانه حساب کرد. از (19) و (20) نتیجه میشود

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1} - \binom{\ell+\mathsf{n}-3}{\mathsf{n}-1}. \tag{22}$$

حالتها یِ نانُعی و چند حالت ِ خاص ِ (22) اینها یَند.

$$\mathsf{E}_{(1,\ell)} = \delta^0_\ell + \delta^1_\ell. \tag{23}$$

$$\mathsf{E}_{(2,\ell)} = 2 - \delta^0_\ell. \tag{24}$$

$$\mathsf{E}_{(3,\ell)} = 1 + 2\,\ell. \tag{25}$$

$$\mathsf{E}_{(4,\ell)} = (1+\ell)^2. \tag{26}$$

از (22) میشود یک رابطه یِ بازگشتی هم ساخت:

$$\binom{\mathsf{k}}{\mathsf{m}} = \binom{\mathsf{k}-1}{\mathsf{m}-1} + \binom{\mathsf{k}-1}{\mathsf{m}}. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n}-1,\ell)} + \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-1)}. \tag{28}$$

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathsf{E}_{(\mathsf{n}-1,\ell)} + \mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell-1)}. \tag{29}$$

و اینها هم نتیجه میدهند

$$\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \tilde{\mathsf{E}}_{(1,\ell)} + \sum_{\mathsf{m}=2}^{\mathsf{n}} \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{m},\ell-1)}. \tag{30}$$

$$\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n}-1,k)}. \tag{31}$$

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathsf{E}_{(1,\ell)} + \sum_{\mathsf{m}=2}^{\mathsf{n}} \mathsf{E}_{(\mathsf{m},\ell-1)}. \tag{32}$$

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \stackrel{\mathrm{g}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} \mathsf{E}_{(\mathsf{n}-1,k)}. \tag{33}$$

3 پانوشتها

[1] Coulomb

[2] Green

[3] Laplace

[4] Kronecker