X1-182 (2024/08/03)

مسئله یِ کِپلِر و مختصاتِ سهموی، کلاسیک

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

حلِ مسئله یِ کلاسیکِ نانسبیتی یِ کِپلِر [1]، با استفاده از مختصاتِ سهموی بررسی میشود.

0 درامد

مسئله یِ کِپلِر [1]مسئله یِ حرکتِ یک ذره در یک نیرو یِ مرکزی یِ متناسب با عکسِ مجذورِ فاصله است. اینجا مسئله یِ نانسبیتی بررسی میشود. معادله-یِ-حرکتِ ذره چنین است.

$$\mu\,\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\alpha\,\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1}$$

μ جرم و $\boldsymbol{r}$ مکانِ ذره است. r اندازه یِ $\boldsymbol{r}$ است و مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) با $\dot{\mathfrak{X}}$ نشان داده شده. α ثابت است. α برا یِ جاذبه مثبت و برا یِ دافعه منفی است. لگرانژی یِ متناظر L است:

$$L = K - U. \tag{2}$$

$$K = \frac{\mu\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{2}. \tag{3}$$

$$U = -\frac{\alpha}{r}. \tag{4}$$

K انرژی یِ جنبشی و U انرژی-یِ-پتانسیل است. هَمیلتنی یِ متناظر هم H است:

$$H = K + U. \tag{5}$$

البته در هَمیلتنی معمولَن سرعت را بر حسبِ مکان و تکانه مینویسند.

1 مختصاتِ سهموی

مختصاتِ کروی را با (r, θ, ϕ)، مختصاتِ استوانِئی را با (ρ, ϕ, z)، و مختصاتِ سهموی (در سه-بُعد) را با (ξ, η, ϕ) نشان میدهم:

$$r = \xi + \eta. \tag{6}$$

$$r\ \cos\theta = \xi - \eta. \tag{7}$$

$$z = \xi - \eta. \tag{8}$$

$$\rho = 2\sqrt{\xi\,\eta}. \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$K = \frac{\mu\,(\xi+\eta)}{2}\ \left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + 2\,\mu\,\xi\,\eta\,\dot{\phi}^2. \tag{10}$$

$$U = -\frac{\alpha}{\xi+\eta}. \tag{11}$$

تکانِها یِ متناظر هم چنین میشوند.

$$P_\xi = \frac{\mu\,(\xi+\eta)\,\dot{\xi}}{\xi}. \tag{12}$$

$$P_\eta = \frac{\mu\,(\xi+\eta)\,\dot{\eta}}{\eta}. \tag{13}$$

$$P_\phi = 4\,\mu\,\xi\,\eta\,\dot{\phi}. \tag{14}$$

با اینها،

$$K=\frac{\xi\,P_\xi^2+\eta\,P_\eta^2}{2\,\mu\,(\xi+\eta)}+\frac{P_\phi^2}{8\,\mu\,\xi\,\eta}. \tag{15}$$

$$H=\frac{\xi\,P_\xi^2+\eta\,P_\eta^2}{2\,\mu\,(\xi+\eta)}+\frac{P_\phi^2}{8\,\mu\,\xi\,\eta}-\frac{\alpha}{\xi+\eta}. \tag{16}$$

2 جدا-سازی

روش ِ هَمیلتِن-یاکُبی [2] را به کار میبَرم (خیل ی از کتابها یِ مکانیک، مثلَن [3]). مشتق ِ پارِئی یِ $\mathfrak{X}$ نسبت به $\mathfrak{y}$ را با $(\partial_{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{X})$ نشان میدهم.معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی [2] متناظر با (16) چنین است.

$$-\partial_t\,S=\frac{\xi\,(\partial_\xi\,S)^2+\eta\,(\partial_\eta\,S)^2}{2\,\mu\,(\xi+\eta)}+\frac{(\partial_\phi\,S)^2}{8\,\mu\,\xi\,\eta}-\frac{\alpha}{\xi+\eta}. \tag{17}$$

در این معادله t و ϕ، جز از طریق ِ بستگی یِ S به آنها، ظاهر نشده اند. پس میشود این نهاده را برا یِ S گرفت.

$$\partial_t\,S=-E. \tag{18}$$

$$\partial_\phi\,S=C. \tag{19}$$

که E و C ثابت َند. از (18) و (19) نتیجه میشود

$$S(t,\xi,\eta,\phi,C,D,E)=-E\,t+C\,\phi+R(\xi,\eta,C,D,E). \tag{20}$$

$$E=\frac{\xi\,(\partial_\xi\,R)^2+\eta\,(\partial_\eta\,R)^2}{2\,\mu\,(\xi+\eta)}+\frac{C^2}{8\,\mu\,\xi\,\eta}-\frac{\alpha}{\xi+\eta} \tag{21}$$

که D یک ثابت ِ دیگر است. معادله یِ (21) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\alpha+D}{2}=\frac{\xi\,(\partial_\xi\,R)^2}{2\,\mu}+\frac{C^2}{8\,\mu\,\xi}-E\,\xi. \tag{22}$$

$$\frac{\alpha-D}{2}=\frac{\eta\,(\partial_\eta\,R)^2}{2\,\mu}+\frac{C^2}{8\,\mu\,\eta}-E\,\eta. \tag{23}$$

پس میشود این نهاده را برا یِ R گرفت.

$$R(\xi,\eta,C,D,E) = R_1(\xi,C,D,E) + R_2(\eta,C,D,E). \tag{24}$$

$$\frac{\alpha+D}{2} = \frac{\xi\,(\partial_\xi\,R_1)^2}{2\,\mu} + \frac{C^2}{8\,\mu\,\xi} - E\,\xi. \tag{25}$$

$$\frac{\alpha-D}{2} = \frac{\eta\,(\partial_\eta\,R_2)^2}{2\,\mu} + \frac{C^2}{8\,\mu\,\eta} - E\,\eta. \tag{26}$$

به این ترتیب،

$$R_1(\xi,C,D,E) = \int^\xi (\mathrm{d}\,s)\,\sqrt{2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha+D)}{\xi} - \frac{C^2}{4\,\xi^2}}. \tag{27}$$

$$R_2(\eta,C,D,E) = \int^\eta (\mathrm{d}\,s)\,\sqrt{2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha-D)}{\eta} - \frac{C^2}{4\,\eta^2}}. \tag{28}$$

$$\begin{aligned} S(t,\xi,\eta,\phi,C,D,E) = {} & -E\,t + C\,\phi \\ & + \int^\xi (\mathrm{d}\,s)\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha+D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{1/2} \\ & + \int^\eta (\mathrm{d}\,s)\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha-D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{29}$$

جوابِ معادله یِ حرکت این است که مشتقها یِ S نسبت به C و D و E ثابت‌َند:

$$\begin{aligned} \phi-\phi_0 = {} & \frac{C}{4}\left\{\int_{\xi_0}^\xi \frac{\mathrm{d}\,s}{s^2}\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha+D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2}\right. \\ & \left. + \int_{\eta_0}^\eta \frac{\mathrm{d}\,s}{s^2}\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha-D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \int_{\xi_0}^\xi \frac{\mathrm{d}\,s}{s}\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha+D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2} \\ & - \int_{\eta_0}^\eta \frac{\mathrm{d}\,s}{s}\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha-D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} t-t_0 = {} & \mu\left\{\int_{\xi_0}^\xi (\mathrm{d}\,s)\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha+D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2}\right. \\ & \left. + \int_{\eta_0}^\eta (\mathrm{d}\,s)\,\left[2\,\mu\,E + \frac{\mu\,(\alpha-D)}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right]^{-1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

که $(t_0, \xi_0, \eta_0, \phi_0)$ ثابتها یی دیگر َند. البته از اینها فقط سه تا مستقل َند: میشود t_0 را انتخاب کرد. بقیه مقدار- ِ-اولیها میشوند. (30) و (31) روابط ِ بین ِ مختصات، (ξ, η, ϕ)، اند. اینها روابط هم ان معادلات ِ مسیر (جدا از بستگی یِ مسیر به زمان) َند: (31) رابطه ای برا یِ (ξ, η) است، و با (30) میشود ϕ را بر حسب ِ (ξ, η) حساب کرد. (32) هم زمان را بر حسب ِ (ξ, η, ϕ) میدهد، در واقع بر حسب ِ (ξ, η)، چون ϕ چرخِئی ست. با افزودن ِ (32) به (30) و (31)، اصولَن بستگی یِ مختصات به زمان به دست میئاید.

شش- ثابت ی که در جوابها وارد شده اند را شرایط ِ اولیه تعیین میکنند. البته در انتخاب ِ مختصات (محورها) آزادی هست، و با استفاده از این آزادی میشود بعض ی از این ثابتها را حذف کرد. از جمله، میشود محور ِ z را چنان گرفت که

$$0 = \xi_0 - \eta_0. \tag{33}$$

$$0 = \dot{\xi}_0 - \dot{\eta}_0. \tag{34}$$

اینها را در مشتق ِ زمانی یِ (32) در $(t = t_0)$ میگذارم. نتیجه میشود

$$D = 0. \tag{35}$$

این را در مشتق ِ زمانی یِ (31) میگذارم. نتیجه میشود

$$0 = \frac{\dot{\xi}}{\xi}\,\left(2\,\mu\,E + \frac{\mu\,\alpha}{\xi} - \frac{C^2}{4\,\xi^2}\right)^{-1/2} - \frac{\dot{\eta}}{\eta}\,\left(2\,\mu\,E + \frac{\mu\,\alpha}{\eta} - \frac{C^2}{4\,\eta^2}\right)^{-1/2}. \tag{36}$$

از (33) و (36) نتیجه میشود

$$0 = \xi - \eta. \tag{37}$$

به این ترتیب، (30) و (32) چنین میشوند.

$$\phi - \phi_0 = \frac{C}{2}\,\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\mathrm{d}\,s}{s^2}\,\left(2\,\mu\,E + \frac{\mu\,\alpha}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right)^{-1/2}. \tag{38}$$

$$t - t_0 = 2\,\mu\,\int_{\xi_0}^{\xi} (\mathrm{d}\,s)\,\left(2\,\mu\,E + \frac{\mu\,\alpha}{s} - \frac{C^2}{4\,s^2}\right)^{-1/2}. \tag{39}$$

اینجا هم، (38) رابطه یِ برا یِ مختصات، (ξ,ϕ)، است، یعنی هم ان معادله یِ مسیر (جدا از بستگی یِ مسیر به زمان). با افزودن ِ (39) به آن، بستگی یِ مسیر به زمان هم به دست میئاید.

روابط ِ (33) و (34) یعنی

$$0 = z_0. \tag{40}$$

$$0 = \dot{z}_0. \tag{41}$$

رابطه یِ (37) هم، که از (33) و (34) نتیجه شد، یعنی

$$0 = z. \tag{42}$$

اینها نتیجه یِ انتخاب ِ محور ِ z اند: چنان که در $(t = t_0)$، مکان و سرعت در صفحه یِ $(z = 0)$ اند. در این صورت حرکت در صفحه یِ $(z = 0)$ میماند.

همچنین، از (6) و (37) نتیجه میشود

$$r = 2\,\xi. \tag{43}$$

به این ترتیب، (38) و (39) چنین میشوند.

$$\phi - \phi_0 = C\,\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}\,s}{s^2}\,\left(2\,\mu\,E + \frac{2\,\mu\,\alpha}{s} - \frac{C^2}{s^2}\right)^{-1/2}. \tag{44}$$

$$t - t_0 = \mu\,\int_{r_0}^{r}(\mathrm{d}\,s)\,\left(2\,\mu\,E + \frac{2\,\mu\,\alpha}{s} - \frac{C^2}{s^2}\right)^{-1/2}. \tag{45}$$

اینها هم ان روابط ی یَند که در جدا-سازی با مختصات ِ کروی، در صفحه یِ $(z = 0)$، به دست میئایند:

$$C = \mu\,r^2\,\dot{\phi}. \tag{46}$$

$$E = \frac{\mu\,\dot{r}^2}{2} + \frac{C^2}{2\,\mu\,r^2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{47}$$

رابطه یِ (47) هم ان رابطه یِ (45) است. با گذاشتن ِ (46) در (47) هم نتیجه میشود

$$E = \frac{C^2}{2\,\mu\,r^4}\,\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\phi}\right)^2 + \frac{C^2}{2\,\mu\,r^2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{48}$$

که هم ان (44) است.

3 پانوشتها

[1] Kepler

[2] Hamilton-Jacobi

[3] S. Neil Rasband; “Dynamics” (John Wiley & Sons, 1983)