

برازشِ خطی، بیضی-گون

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

برازشِ یک قُتبی - صفحه به یک دسته داده بررسی میشود. نشان داده میشود هر دسته - داده متناظر است با یک بیضی-گون: مرکز بیضی-گون میانگین دسته-داده است، و درون قُتبی - صفحه است؛ و کوچکترین محور بیضی-گون بر قُتبی - صفحه عمود است. اگر دسته-داده متناظر با یک لایه ی نازک بیضی-گونی باشد، بیضی-گون حاصل از برازش هم آن بیضی-گون دسته-داده است.

0 درآمد

فاصله ی نقطه ی r از مجموعه ی $\mathbb{S}$ را با $\ell_{\mathbb{S}}(r)$ نشان میدهم. این فاصله اینفیمم (بزرگترین کران-پایین) فاصله ی r از نقاط $\mathbb{S}$ است: $\ell_{\mathbb{S}}(r)$ اینفیمم جذر $f_{\mathbb{S}}(r, \cdot)$ است، که دامنه ی $f_{\mathbb{S}}(r, \cdot)$ مجموعه ی $\mathbb{S}$ است و

$$f_{\mathbb{S}}(r, s) = (r - s) \cdot (r - s). \quad (1)$$

$$\ell_{\mathbb{S}}(r) = \sqrt{\inf[f_{\mathbb{S}}(r, \mathbb{S})]}. \quad (2)$$

برازش خطی، بیضی-گون

در یک فضا ی خطی، فُتق- صفحه ی $\mathbb{P}$ با بردار- یکه ی $\hat{n}$ و عدد a مشخص میشود:

$$\mathbb{P} = \{s \mid \hat{n} \cdot s = a\}. \quad (3)$$

دیده میشود اگر s_1 و s_2 در فُتق- صفحه ی $\mathbb{P}$ باشند،

$$\hat{n} \cdot (s_2 - s_1) = 0. \quad (4)$$

یعنی $\hat{n}$ بر $\mathbb{P}$ عمود است. همچنین،

$$f_{\mathbb{P}}(\mathbf{0}, s) = s \cdot s. \quad (5)$$

کمینه ی $f_{\mathbb{S}}(r, \cdot)$ را میشود با روش ضریب- لگرانژ [1] به دست آورد: تابع $\tilde{f}_{\mathbb{P}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{f}_{\mathbb{P}}(r, s, \lambda) = f_{\mathbb{P}}(r, s) + \lambda (a - \hat{n} \cdot s). \quad (6)$$

λ ضریب لگرانژ [1] است. فرینه- کردن $f_{\mathbb{S}}(r, s)$ نسبت به s ، همئرز است با فرینه- کردن $\tilde{f}_{\mathbb{P}}(r, s, \lambda)$ نسبت به (s, λ) . s ی که $f_{\mathbb{S}}(r, s)$ را فرینه میکند را با s_o نشان میدهم. s_o از حل این معادلات به دست میآید.

$$\mathbf{0} = 2(s_o - r) - \lambda_o \hat{n}. \quad (7)$$

$$0 = a - \hat{n} \cdot s_o. \quad (8)$$

اینها نتیجه میدهند

$$s_o = r + \hat{n} (a - \hat{n} \cdot r). \quad (9)$$

$$f_{\mathbb{P}}(r, s_o) = (a - \hat{n} \cdot r)^2. \quad (10)$$

$$\ell_{\mathbb{P}}(r) = |a - \hat{n} \cdot r|. \quad (11)$$

$$\ell_{\mathbb{P}}(\mathbf{0}) = |a|. \quad (12)$$

$|a|$ فاصله ی مبدئ از فُتق- صفحه ی $\mathbb{P}$ است.

1 برازش خطی

r_i ها نقاطی در یک فضا ی k بُعدی یَند. هدف برازشِ فُقی - صفحه ی $\mathbb{P}$ به این نقاط است. منظور از برازش این است که $\mathbb{P}$ چنان باشد که میانگین (یا مجموع) مجذور - فاصله ی نقاط از $\mathbb{P}$ کمینه شود. میانگین مجذور - فاصله ی نقاط از $\mathbb{P}$ را با $\Delta(a, \hat{n})$ نشان می‌دهم، که $(a, \hat{n})$ پارامترها ی مشخص - کننده ی فُقی - صفحه ی $\mathbb{P}$ اند: رابطه ی (3). به این ترتیب،

$$\Delta(a, \hat{n}) = \frac{1}{N} \sum_i (a - \hat{n} \cdot r_i)^2. \quad (13)$$

که N تعداد r_i ها ست. a ی که $\Delta(a, \hat{n})$ را کمینه میکند را با $a_\bullet$ نشان می‌دهم. $a_\bullet$ این را بر می‌ناورد.

$$0 = \sum_i (a_\bullet - \hat{n} \cdot r_i). \quad (14)$$

میانگین r_i ها را با $r_\circ$ نشان می‌دهم:

$$r_\circ = \frac{1}{N} \sum_i r_i. \quad (15)$$

رُشن است که $r_\circ$ به a یا $\hat{n}$ بستگی ندارد. (14) چنین میشود.

$$a_\bullet = \hat{n} \cdot r_\circ. \quad (16)$$

این را در (13) میگذارم:

$$\Delta(a_\bullet, \hat{n}) = \frac{1}{N} \sum_i [\hat{n} \cdot (r_i - r_\circ)]^2. \quad (17)$$

ماتریس M را چنین تعریف می‌کنم.

$$M \mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_i (r_i - r_\circ) [(r_i - r_\circ) \cdot \mathbf{u}]. \quad (18)$$

باز، رُشن است که M به a یا $\hat{n}$ بستگی ندارد. (17) چنین میشود.

$$\Delta(a_\bullet, \hat{n}) = \hat{n} \cdot (M \hat{n}). \quad (19)$$

برازش خطی، بیضی-گون

طول $\hat{n}$ یک است. پس کمینه-کردن $\Delta(a_\bullet, \hat{n})$ همراه با این قید است که $(\hat{n} \cdot \hat{n})$ یک بماند. باز روش ضرب-لگرانژ [1] را به کار میبریم: $\tilde{\Delta}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\Delta}(\hat{n}, \mu) = \Delta(a_\bullet, \hat{n}) + \mu(1 - \hat{n} \cdot \hat{n}). \quad (20)$$

یعنی،

$$\tilde{\Delta}(\hat{n}, \mu) = \hat{n} \cdot (M \hat{n}) + \mu(1 - \hat{n} \cdot \hat{n}). \quad (21)$$

فرینه-کردن $\Delta(a_\bullet, \hat{n})$ ، هم‌ئز است با فرینه-کردن $\tilde{\Delta}(\hat{n}, \mu)$ ی $\hat{n}$ که $\Delta(a_\bullet, \hat{n})$ را کمینه میکند را با $\hat{n}_o$ نشان میدهم. از تعریف M دیده میشود

$$\mathbf{v} \cdot (M \mathbf{u}) = \frac{1}{N} \sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{v}] [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{u}]. \quad (22)$$

که نشان میدهد M متقارن است. این، از جمله نتیجه میدهد $\hat{n}_o$ اینها را بر میناورد.

$$\mathbf{0} = M \hat{n}_o - \mu \hat{n}_o. \quad (23)$$

$$1 = \hat{n}_o \cdot \hat{n}_o. \quad (24)$$

این یک معادله ی ویژه-مقداری ست: μ یک ویژه-مقدار M است، و $\hat{n}_o$ ویژه-بردار متناظر است. (23) و (24) را در (19) میگذارم. نتیجه میشود

$$\Delta(a_\bullet, \hat{n}_o) = \mu. \quad (25)$$

کمینه ی Δ ویژه-مقدار M است. البته ویژه-مقدار M یکتا نیست. M یک ماتریس $(k \times k)$ است و k ویژه-مقدار دارد، که ممکن است بعضی ها ی شان تکراری باشند. از این که M متقارن است، نتیجه میشود یک پایه ی یک-متعامد هست که اعضا ی آن ویژه-بردارها ی M اند:

$$M \hat{e}_\alpha = \mu_\alpha \hat{e}_\alpha. \quad (26)$$

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (27)$$

و البته μ_α ها (ویژه-مقدارها ی M) حقیقی یَند. همچنین،

$$\mathbf{u} \cdot (M \mathbf{u}) = \frac{1}{N} \sum_i [(r_i - r_o) \cdot \mathbf{u}]^2. \quad (28)$$

که نشان می‌دهد M شبه-معین-مثبت است. پس ویژه-مقدارها ی M نامنفی یَند:

$$\mu_\alpha \geq 0. \quad (29)$$

شاخصها را چنان میگیریم که μ_1 کوچکترین ویژه-مقدار M باشد. در این حالت،

$$\Delta(a_\bullet, \hat{n}_o) = \mu_1. \quad (30)$$

$$\hat{n}_o = \hat{e}_1. \quad (31)$$

کمینه ی مطلق Δ کوچکترین ویژه-مقدار (μ_1) است، و $\hat{n}_o$ ویژه-بردارِ متناظر ($\hat{e}_1$) است. خُدی $a_\bullet$ هم، با رابطه ی (16)، به $\hat{n}$ بستگی دارد. مقدار $a_\bullet$ به ازا ی ($\hat{n} = \hat{n}_o$) را با a_o نشان می‌دهم:

$$a_o = \hat{n}_o \cdot r_o. \quad (32)$$

و (30) چنین میشود.

$$\Delta(a_o, \hat{n}_o) = \mu_1. \quad (33)$$

2 یک لایه ی بیضی-گونی

$\mathbb{L}$ یک لایه ی بیضی-گونی ست، که بین دُ بیضی-گونِ متشابه است. این بیضی-گونها مرکزِ شان r_o است، و محور-اصلیها ی شان با $\hat{e}_1$ تا $\hat{e}_m$ هم-راستا ست. $\hat{e}_\alpha$ ها یک-متعامدَند:

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (34)$$

$\mathbb{L}$ را میشود چنین نمایش داد.

$$\mathbb{L} = \{r \mid 1 \leq \mathcal{E}(r) \leq b^2\}. \quad (35)$$

برازشِ خطی، بیضی-گون

که b یک ثابتِ حقیقی و بزرگتر-از-یک است و

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \frac{[\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)]^2}{(\ell_{\alpha})^2}. \quad (36)$$

ℓ_{α} طولِ نیم-محورِ شماره‌ی α برای بیضی-گونِ درونی ست. ماتریسِ $\mathfrak{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{M} \mathbf{u} = \frac{1}{V} \int_{\mathbb{L}} (dV) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{u}]. \quad (37)$$

V حجمِ $\mathbb{L}$ متناظر با عنصر-حجم (dV) است، و

$$dV = \prod_{\alpha} (\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot d\mathbf{r}). \quad (38)$$

متغیرِ s را چنین تعریف میکنم.

$$\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot \mathbf{s} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)}{\ell_{\alpha}}. \quad (39)$$

که یعنی،

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \sum_{\alpha} \ell_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} (\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot \mathbf{s}). \quad (40)$$

به این ترتیب،

$$\mathbb{L} = \{\mathbf{r} \mid 1 \leq \mathcal{F}(\mathbf{s}) \leq b^2\}. \quad (41)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha} (\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot \mathbf{s})^2. \quad (42)$$

$$\mathfrak{M} \mathbf{u} = \frac{\mathfrak{J}}{V} \int_{\mathbb{L}} (dW) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{u}]. \quad (43)$$

$$\mathfrak{J} = \prod_{\alpha} \ell_{\alpha}. \quad (44)$$

$$(dW) = \prod_{\alpha} (\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot d\mathbf{s}). \quad (45)$$

از تقارنِ $\mathbb{L}$ تحتِ دَوَران و انعکاسِ s نتیجه میشود

$$\mathfrak{A} \delta_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{L}} (dW) (\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \cdot \mathbf{s}) (\hat{\mathbf{e}}_{\beta} \cdot \mathbf{s}). \quad (46)$$

به این ترتیب،

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot (\mathfrak{M} \mathbf{u}) = \frac{\mathfrak{J} \mathfrak{A} (\ell_\alpha)^2 (\hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{V}. \quad (47)$$

که نشان میدهد $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$ ویژه-بردار $\mathfrak{M}$ است. ویژه-مقدار متناظر $\mathfrak{m}_\alpha$ است:

$$\mathfrak{m}_\alpha = \frac{\mathfrak{J} \mathfrak{A} (\ell_\alpha)^2}{V}. \quad (48)$$

از (46)، ضمن نتیجه میشود

$$\begin{aligned} k \mathfrak{A} &= \int_{\mathbb{L}} (dW) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}), \\ &= S_{k-1} \int_1^b (d|\mathbf{s}|) |\mathbf{s}|^{k+1}. \end{aligned} \quad (49)$$

که S_{k-1} فک-مساحت یک کره $(k-1)$ -بعدی به شعاع یک است. پس،

$$\mathfrak{A} = \frac{(b^{k+2} - 1) S_{k-1}}{k(k+2)}. \quad (50)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} V &= \int_{\mathbb{L}} (dV), \\ &= \mathfrak{J} \int_{\mathbb{L}} (dW), \\ &= \mathfrak{J} S_{k-1} \int_1^b (d|\mathbf{s}|) |\mathbf{s}|^{k-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

که نتیجه میدهد

$$V = \frac{(b^k - 1) \mathfrak{J} S_{k-1}}{k}. \quad (52)$$

$$\mathfrak{J} \mathfrak{A} = \frac{(b^{k+2} - 1) V}{(k+2)(b^k - 1)}. \quad (53)$$

$$\mathfrak{m}_\alpha = \frac{(b^{k+2} - 1) (\ell_\alpha)^2}{(k+2)(b^k - 1)}. \quad (54)$$

برازش خطی، بیضی-گون

$\mathcal{M}$ که با (37) تعریف شده، مانسته ی M است که با (18) تعریف شده، وقت ی r_i ها حجمی-یکنواخت تزیع شده اند. وقت ی، علاوه-بر-این، ناحیه ای که r_i ها بر آن تزیع شده اند یک لایه ی بیضی-گونی ست، ویژه-بردارها هم ان محور-اصلیها میشوند:

$$\hat{e}_\alpha = \hat{e}_\alpha. \quad (55)$$

و ویژه-مقدارها با مجذور طول نیم-محور-اصلیها متناسب میشوند:

$$\mu_\alpha = m_\alpha. \quad (56)$$

$$\mu_\alpha = \frac{(b^{k+2} - 1)(\ell_\alpha)^2}{(k+2)(b^k - 1)}. \quad (57)$$

یک حالت خاص این است که لایه ی بیضی-گونی نازک باشد. این حد $(b \rightarrow 1)$ است. از جمله،

$$\lim_{b \rightarrow 1} m_\alpha = \frac{(\ell_\alpha)^2}{k}. \quad (58)$$

3 سرآمد

برازش خطی ی یک دسته داده (برازش یک فُق- صفحه به یک دسته داده) میشود قطری-کردن یک ماتریس حقیقی ی متقارن شبه-معین-مثبت. این ماتریس متناظر است با یک بیضی-گون: ویژه-بردارها ی ماتریس با محور-اصلیها ی بیضی-گون هم-راستا یند، و ویژه-مقدارها ی ماتریس برابرند با بُعد فضا ضرب در مجذور طول-نیم-محور-اصلیها. مرکز بیضی-گون هم میانگین نقاط داده است. معادله ی بیضی-گون این است.

$$1 = \sum_{\alpha} \frac{[\hat{e}_\alpha \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)]^2}{k \mu_\alpha}. \quad (59)$$

وقت ی نقاط داده رو ی یک لایه ی نازک بیضی-گونی حجمی-یکنواخت تزیع شده اند، این لایه-ی-نازک هم ان بیضی-گون متناظر-با-برازش-خطی ست.

4 پانوشتها